

有限要素法入門

中島 研吾

東京大学情報基盤センター
nakajima@cc.u-tokyo.ac.jp

- 有限要素法入門
- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

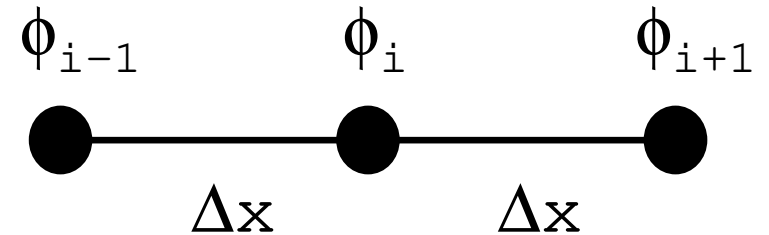
差分法と有限要素法

- 偏微分方程式（Partial Differential Equations, PDE）の近似解法
 - 全領域を小領域（メッシュ, 要素）に分割する
- 差分法
 - 微分係数を直接近似
 - Taylor展開

Taylor展開差分法

Finite Difference Method (FDM)

2次精度中央差分



$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i \dots$$

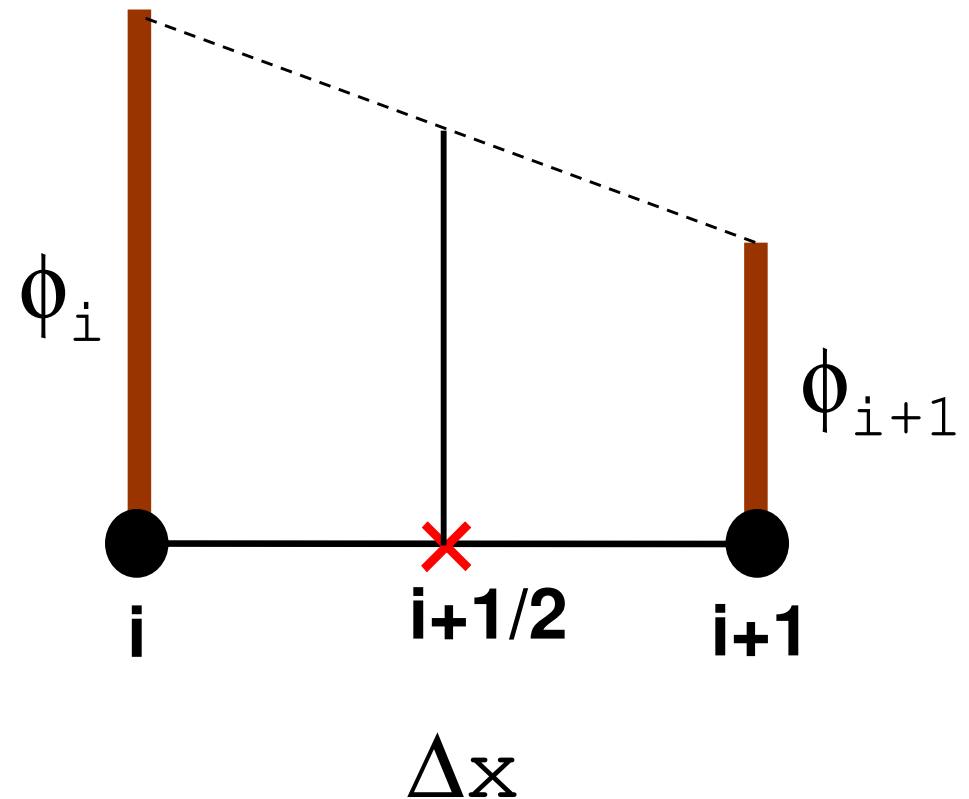
$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i \dots$$

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{2 \times (\Delta x)^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i \dots$$

Finite Difference Method (FDM)

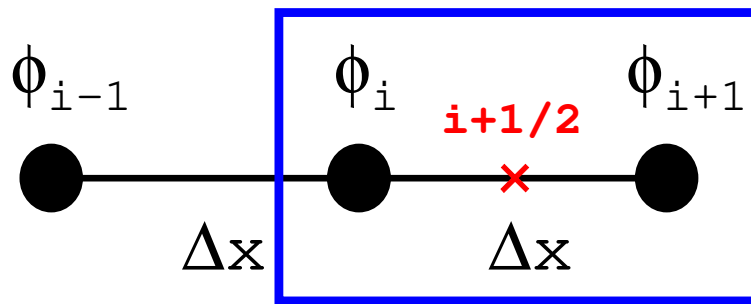
(有限) 差分法：巨視的微分
macroscopic differentiation

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+1/2} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+1/2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$



二階の微分係数

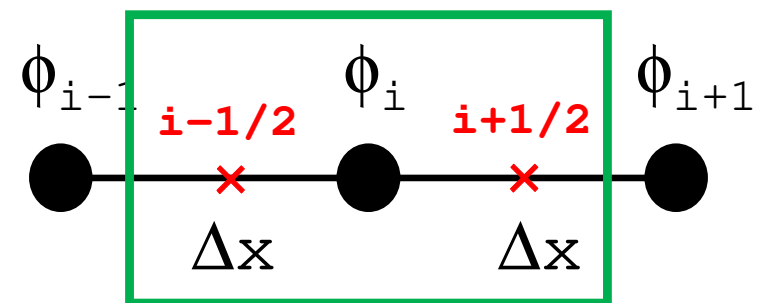
- 点「 x 」における「(近似的) 傾き・微分係数」(点「 i 」と点「 $i+1$ 」の中心)



$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+1/2} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$

$\Delta x \rightarrow 0$: 真の傾き(微分係数)

- 点「 i 」における二階の微分係数



$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

差分法

一次元熱伝導方程式 要素単位の線形方程式

- 差分法による離散化

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- 各要素における線形方程式は以下のような形になる

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + BF = 0$$



$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + BF(i) = 0 \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} \phi_{i+1} - \frac{2}{\Delta x^2} \phi_i + \frac{1}{\Delta x^2} \phi_{i-1} + BF(i) = 0 \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$A_L(i) \times \phi_{i-1} + A_D(i) \times \phi_i + A_R(i) \times \phi_{i+1} = BF(i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$A_L(i) = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad A_D(i) = -\frac{2}{\Delta x^2}, \quad A_R(i) = \frac{1}{\Delta x^2}$$

差分法と有限要素法

- 偏微分方程式の近似解法
 - 全領域を小領域（メッシュ，要素）に分割する
- 差分法
 - 微分係数を直接近似
 - Taylor展開
- 有限要素法
 - Finite Element Method（FEM）
 - 積分形式で定式化された「弱形式（weak form）」を解く
 - 微分方程式の解（古典解）に対して「弱解（weak solution）」
 - 重み付き残差法，変分法
 - 複雑形状への適用
 - 差分でもある程度の複雑形状は扱うことが可能

差分法で複雑形状を扱う例

Handbook of Grid Generation

座標変換

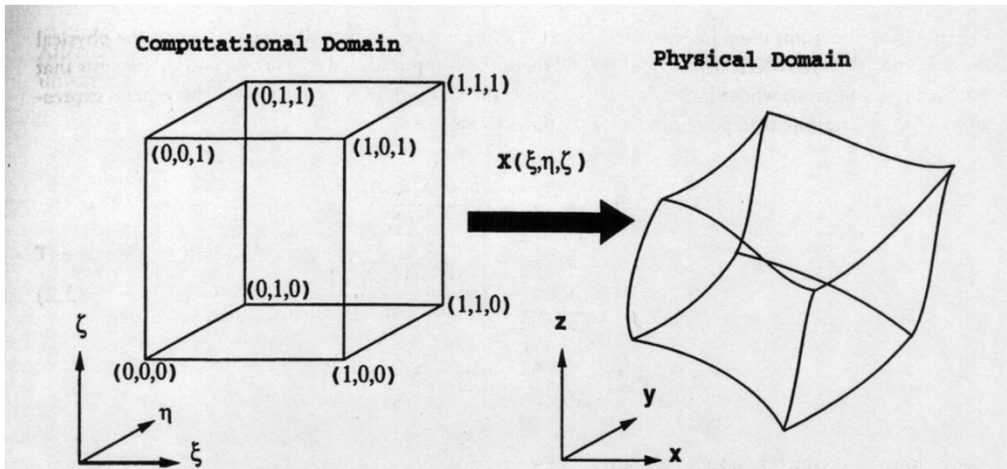


FIGURE 3.1 Transformation between computational and physical domains.

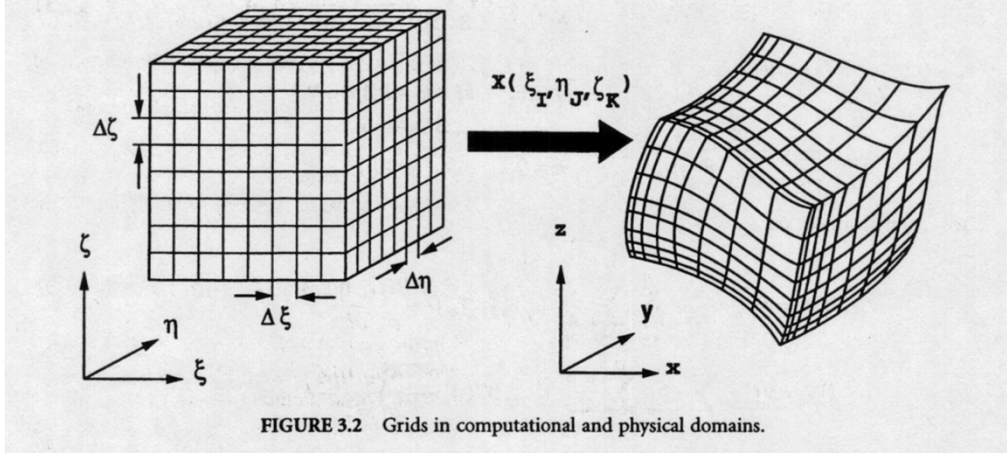
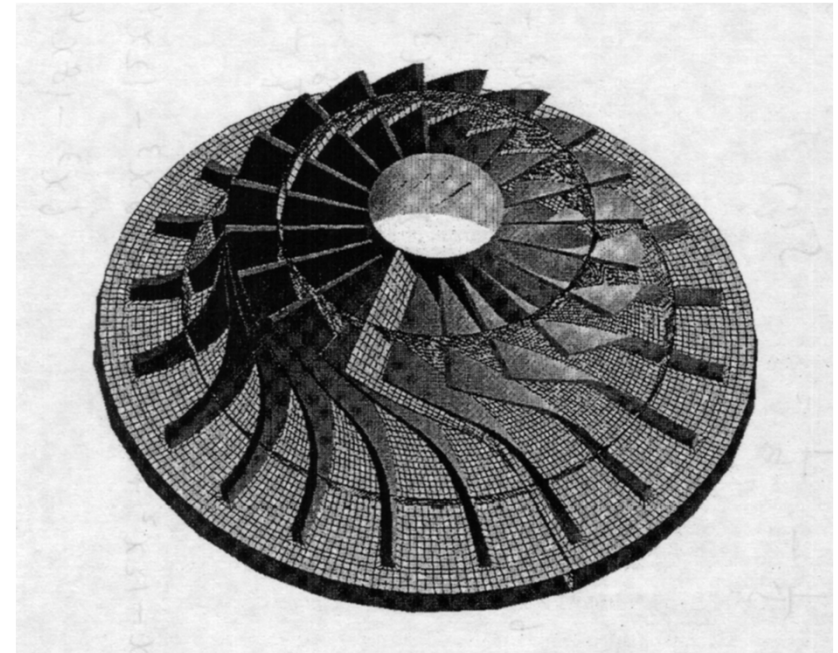


FIGURE 3.2 Grids in computational and physical domains.

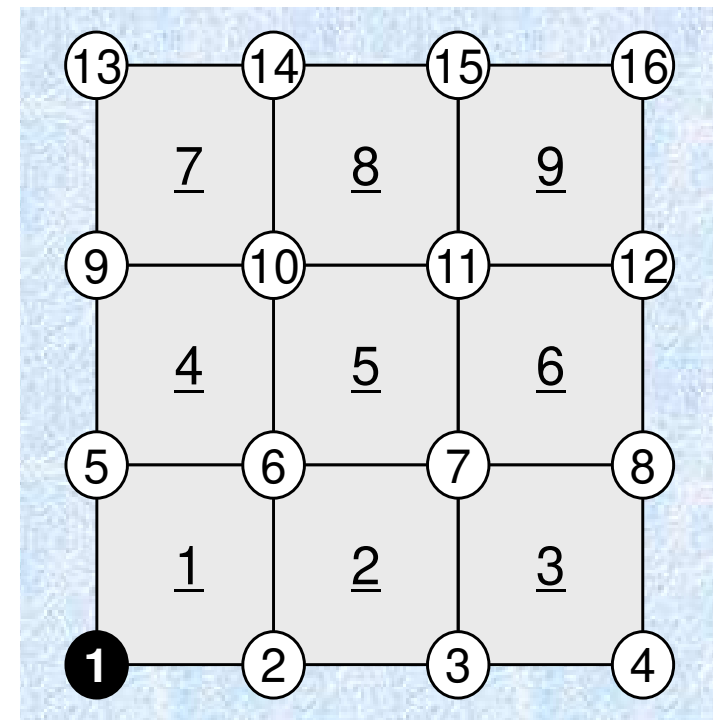


Finite-Element Method (FEM)

- 偏微分方程式の解法として広く知られている
 - elements (meshes, 要素) & nodes (vertices, 節点)
- 以下の二次元熱伝導問題を考える:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0$$

- 16節点, 9要素 (四角形)
- 一様な熱伝導率 ($\lambda=1$)
- 一様な体積発熱 ($Q=1$)
- 節点1で温度固定: $T=0$
- 周囲断熱



Galerkin FEM procedures

- 各要素にガラーキン法を適用:

$$\int_V [N]^T \left\{ \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \right\} dV = 0$$

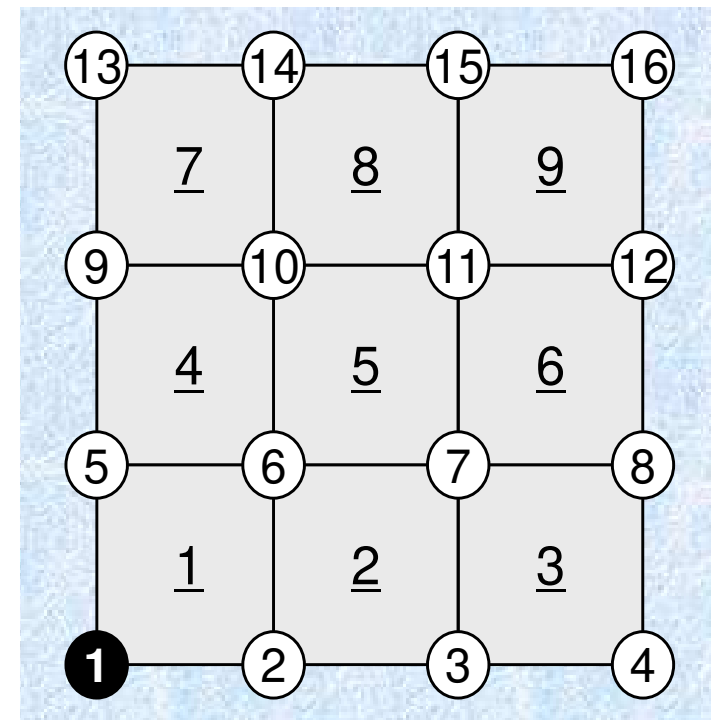
各要素で: $T = [N]\{\phi\}$

$[N]$: 形状関数(内挿関数)

- 偏微分方程式に対して, グ
リーンの定理を適用し, 以下
の「弱形式」を導く

$$-\int_V \lambda \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dV \cdot \{\phi\}$$

$$+ \int_V Q [N]^T dV = 0$$

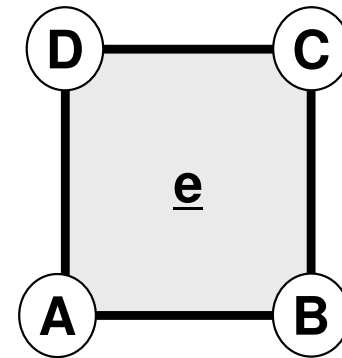


Element Matrix : 要素マトリクス

- 各要素において積分を実行し，要素マトリクスを得る

$$-\int_V \lambda \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dV \cdot \{\phi\}$$

$$+ \int_V Q [N]^T dV = 0$$



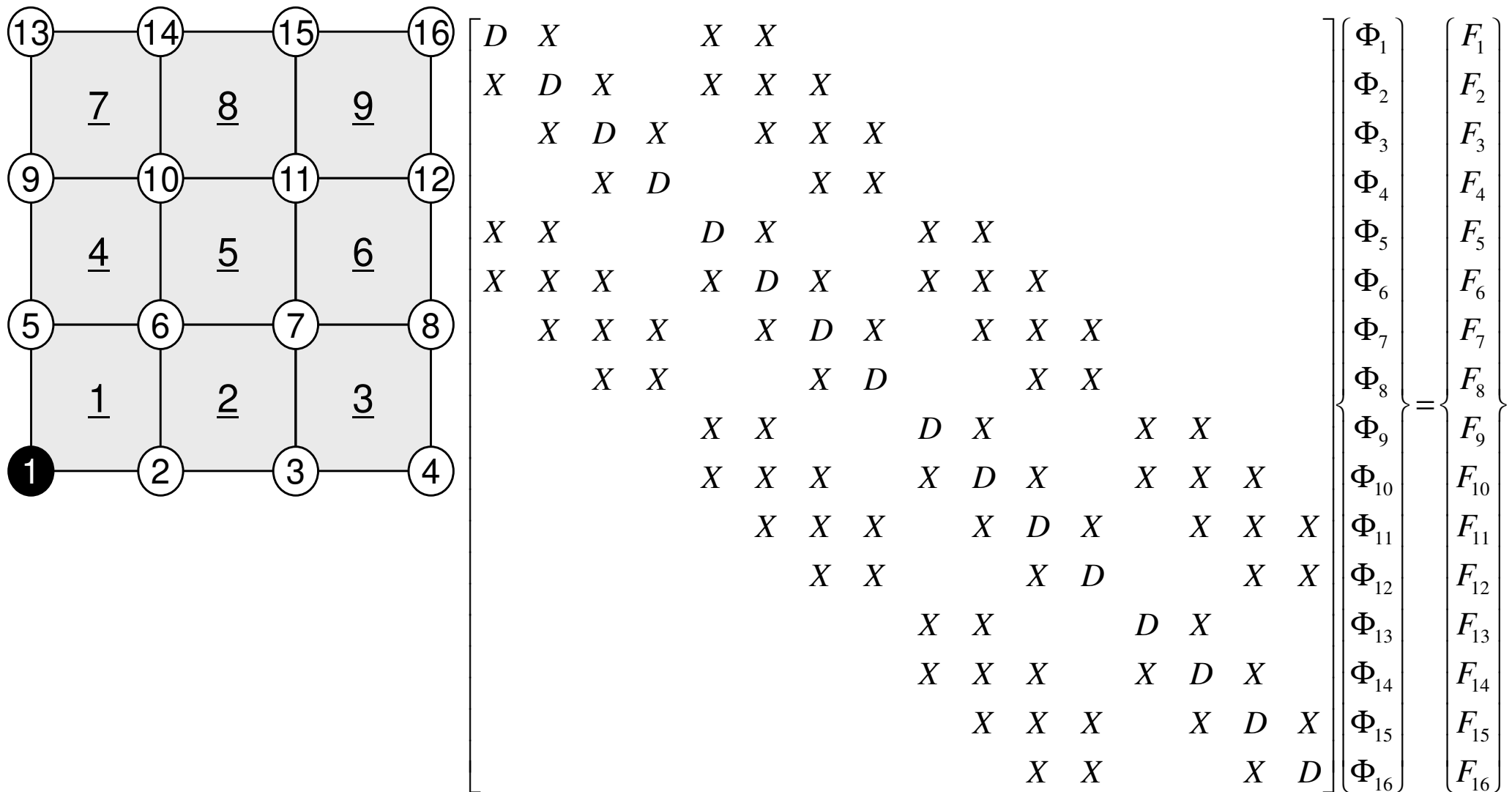
$$[k^{(e)}] \{\phi^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}$$

$$\begin{matrix} \longrightarrow & \begin{bmatrix} k_{AA}^{(e)} & k_{AB}^{(e)} & k_{AC}^{(e)} & k_{AD}^{(e)} \\ k_{BA}^{(e)} & k_{BB}^{(e)} & k_{BC}^{(e)} & k_{BD}^{(e)} \\ k_{CA}^{(e)} & k_{CB}^{(e)} & k_{CC}^{(e)} & k_{CD}^{(e)} \\ k_{DA}^{(e)} & k_{DB}^{(e)} & k_{DC}^{(e)} & k_{DD}^{(e)} \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \phi_A^{(e)} \\ \phi_B^{(e)} \\ \phi_C^{(e)} \\ \phi_D^{(e)} \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} f_A^{(e)} \\ f_B^{(e)} \\ f_C^{(e)} \\ f_D^{(e)} \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Global/overall Matrix : 全体マトリクス

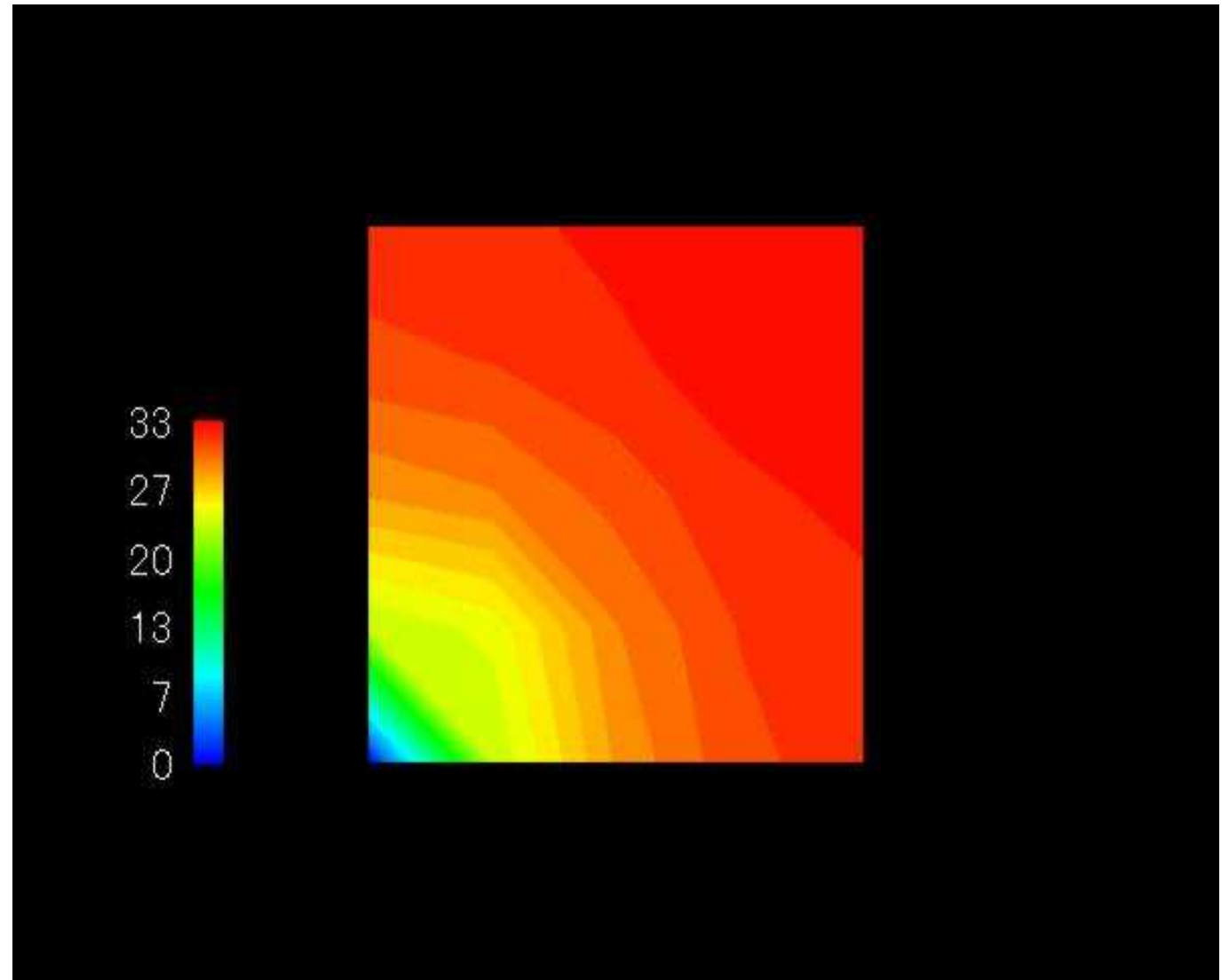
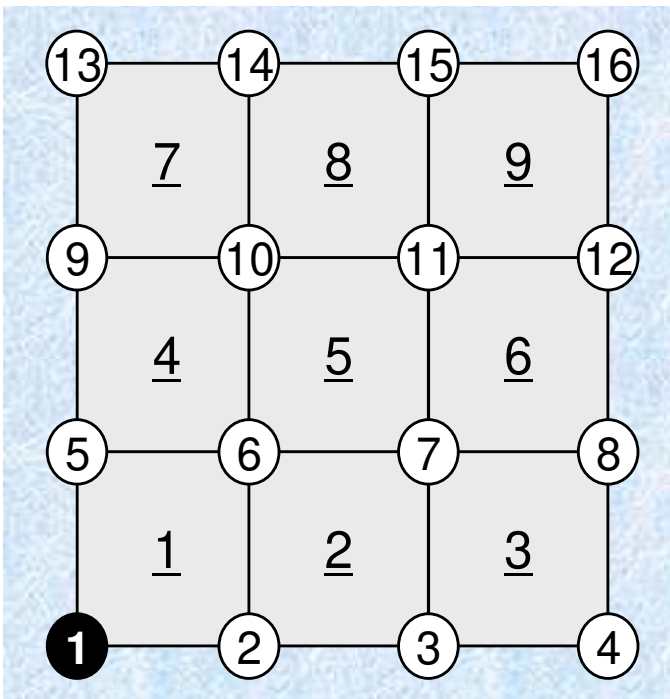
各要素マトリクスを全体マトリクスに足しこむ

$$[K]\{\Phi\} = \{F\}$$



計算結果

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0$$

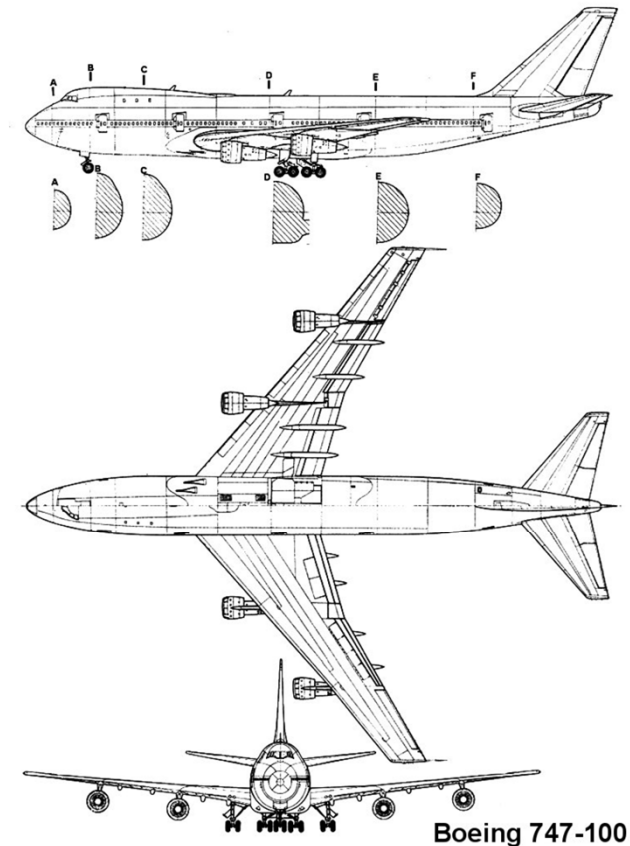
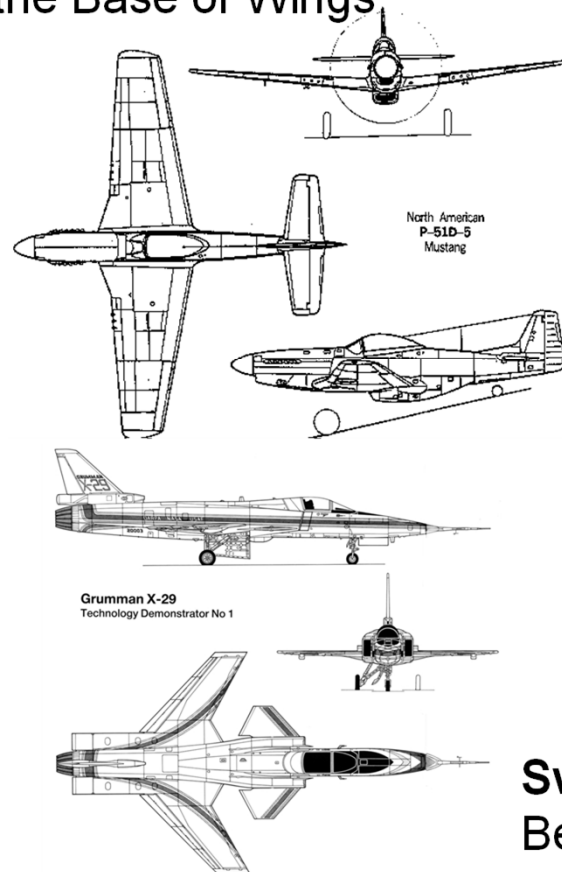


有限要素法の歴史

- 航空機の構造計算の手法として1950年代前半，ボーイング社，ワシントン大学（University of Washington）の研究者ら（M.J.Turner, H.C.Martin）によって提案

- 後退翼：梁理論では対応できない

Straight Wing: Subsonic
Beam Theory for Calc. of Load
at the Base of Wings



Swept Wing: Transonic-Supersonic
Beam Theory cannot be applied

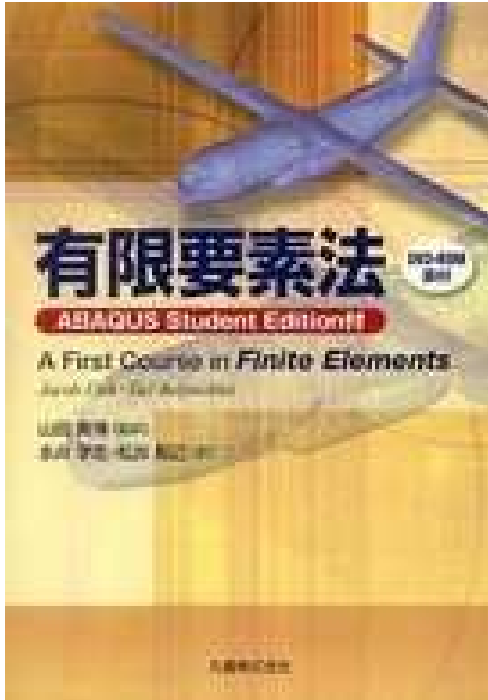
有限要素法の歴史

- 航空機の構造計算の手法として1950年代前半, ボーイング社, ワシントン大学 (University of Washington) の研究者ら (M.J.Turner, H.C.Martin) によって提案
 - 後退翼: 梁理論では対応できない
- 様々な分野への拡張
 - 非線形: T.J.Oden
 - 構造力学以外の分野: O.C.Zienkiewicz
- 商用パッケージ
 - NASTRAN
 - NASAによって開発された有限要素法による構造解析プログラム
 - 米国MSC社によって商用化
 - 製造業において広く使用されている
 - PC化により爆発的に普及

参考文献 (1/2)

- 菊地「有限要素法概説（新訂版）」，サイエンス社，1999.
- 竹内，檜山，寺田（日本計算工学会編）「計算力学：有限要素法の基礎」，森北出版，2003.
- 登坂，大西「偏微分方程式の数値シミュレーション 第2版」，東大出版会，2003.
 - 差分法，境界要素法との比較
- 福森「よくわかる有限要素法」，オーム社，2005.
 - ヘルムホルツ方程式
- 矢川，宮崎「有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析」，サイエンス社，1985.（品切）
- Segerlind, L.（川井監訳）「応用有限要素解析 第2版」，丸善，1992.（品切）

参考文献 (2/2)



- Fish, Belytschko (山田, 永井, 松井訳) 「有限要素法」, 丸善, 2008.
 - 原著「A First Course in Finite Elements」
 - ABAQUS Student Editionが附属

参考文献（より進んだ読者向け）

- 菊池，岡部「有限要素システム入門」，日科技連，1986.
- 山田「高性能有限要素法」，丸善，2007.
- 奥田，中島「並列有限要素法」，培風館，2004.
- Smith, I. 他「Programming the Finite Element Method (4th edition)」，Wiley.

- 有限要素法入門
- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

偏微分方程式の近似解法

- 領域 V , 境界 S における以下の微分方程式を解くことを考える (境界値問題) :

$$L(u) = f$$

- 微分方程式の解 u が以下のような関数 u_M で近似的に表されるものとする (一次結合, 線形結合) :

$$u_M = \sum_{i=1}^M a_i \Psi_i$$

Ψ_i 領域, 境界において定義される, 位置座標のみ既知関数, 互いに独立である: 試行関数 (trial/test function) と呼ばれる。線形代数における基底 (basis) に相当する

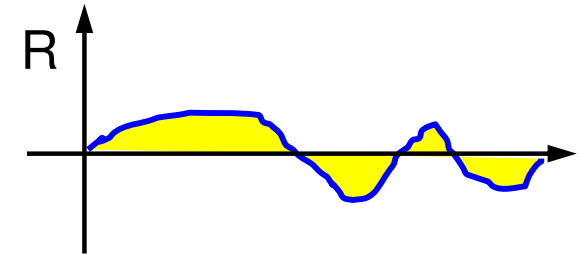
a_i 係数 (未知数)

重み付き残差法

Method of Weighted Residual (MWR)

- 以下に示す残差 (residual) R が0であれば厳密解である：

$$R = L(u_M) - f$$



- 重み付き残差法では残差 R に重み関数 w (weight/weighting function) を乗じて、領域全体で積分した量が0になるような条件を考える：

$$\int_V w R(u_M) dV = 0$$

- 重み付き残差法は、残差=0の条件を領域において「平均的に」満たす近似解法である。

変分法（Ritz法）（1/2）

- 多くの問題において汎関数（functional） $I(u)$ が存在
- 汎関数が極値を持つために u が満たすべき微分方程式をオイラー（Euler）方程式という。
 - 汎関数 $I(u)$ を停留させる u はEuler方程式を満たす
- 例えば、弾性力学の支配方程式（平衡方程式、仮想仕事の原理）と等価な汎関数は、「最小ポテンシャルエネルギーの原理（ひずみエネルギー最小の法則）」である。

変分法（Ritz法）（2/2）

- 以下の近似解の式を $I(u)$ に代入し， $I_M = I(u_M)$ が極値になるようにすれば，係数 a_i が求められ u_M が決定される。

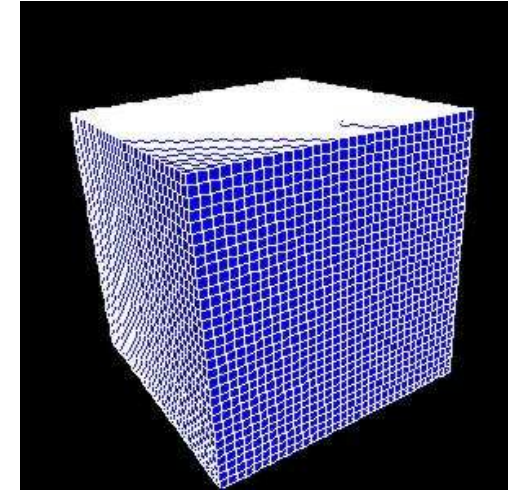
$$u_M = \sum_{i=1}^M a_i \Psi_i$$

- 変分法は偏微分方程式の近似解法としては，理論的，数学的，物理的な背景が堅牢で理解しやすいのであるが，等価な変分問題を持つような微分方程式で無いと適用できない：
 - 本授業では重み付き残差法を使用する
 - 厳密解，解析解に近いものと考えられる

有限要素法

- 全体を細かい要素に分割し，各要素に対して以下の近似を適用する：

$$u_M = \sum_{i=1}^M a_i \Psi_i$$



- 各要素に対して，重み付き残差法，または変分法（後述）を適用する。
- 全体の効果を足し合わせて，結果的に得られる連立一次方程式を解くことによって，偏微分方程式の近似解を求める（3分で分かる有限要素法）

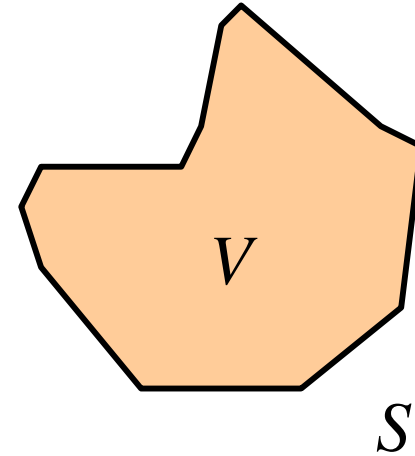
重み付き残差法の例 (1/3)

- 熱伝導方程式

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0 \quad \text{in 領域 } V$$

λ : 熱伝導率 (領域 V で一様), Q : 体積あたり発熱量

$$T = 0 \quad \text{at 境界 } S$$



- 近似解

$$T = \sum_{j=1}^n a_j \Psi_j$$

- 残差

$$R(a_j, x, y) = \lambda \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) + Q$$

重み付き残差法の例 (2/3)

- 重み関数 w_i を乗じて積分

$$\int_V w_i R dV = 0$$

- 重み関数 w_i が n 個の異なる関数であるとするれば、
上式は n 個の連立一次方程式となる
 - 試行関数の数 = 重み関数の数

$$\sum_{j=1}^n a_j \int_V w_i \lambda \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) dV = - \int_V w_i Q dV \quad (i = 1, \dots, n)$$

重み付き残差法の例 (3/3)

- 行列の形式で書くと以下のようなになる

$$[B]\{a\} = \{Q\}$$

$$B_{ij} = \int_V w_i \lambda \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) dV, \quad Q_i = - \int_V w_i Q dV$$

実際はこれとは少しちがう

様々な重み付き残差法

- 重み関数の定義の仕方が異なる
- 選点法 (Collocation Method)
- 最小二乗法 (Least Square Method)
- ガラーキン法 (Galerkin Method)

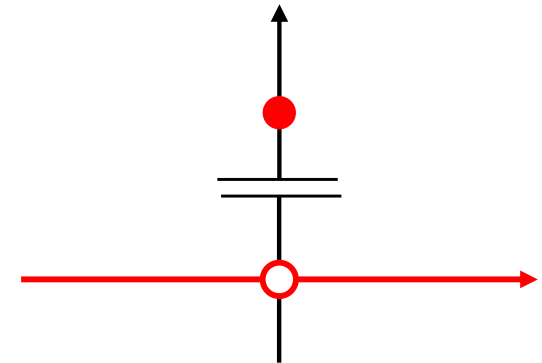
選点法 (Collocation Method)

- ディラックのデルタ関数を重み関数として選ぶ
 - 引数=0のとき無限大, それ以外では0の値をとる
 - 積分すると=1

$$\delta(z) = \infty \quad \text{if } z = 0$$

$$\delta(z) = 0 \quad \text{if } z \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz = 1$$

$$w_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad \mathbf{x}: \text{座標ベクトル}$$



- デルタ関数の性質を利用して, n 個の選点 (collocation point) で残差 R が0になるように定め, n を増加させることによって領域全体で残差=0となる

$$\int_V R \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) dV = R \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \quad \begin{cases} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \infty \text{ at } \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0 \text{ at } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

最小二乗法 (Least Square Method)

- 重み関数として, 以下を与える :

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}$$

- 以下の積分を未知数 a_i について最小化する :

$$I(a_i) = \int_V [R(a_i, \mathbf{x})]^2 dV$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [I(a_i)] = 2 \int_V \left[R(a_i, \mathbf{x}) \frac{\partial R(a_i, \mathbf{x})}{\partial a_i} \right] dV = 0$$



$$\int_V \left[R(a_i, \mathbf{x}) \frac{\partial R(a_i, \mathbf{x})}{\partial a_i} \right] dV = 0$$

ガラーキン法 (Galerkin Method)

- 重み関数 = 試行関数

$$w_i = \Psi_i$$

- Galerkin, Boris Grigorievich
 - 1871-1945
 - ロシア, 旧ソビエト連邦の工学者, 数学者にして技術者
 - 1906年~1907年に反帝政派として投獄中にガラーキン法のアイデアを考えついたらしい。



例題 (1/2)

- 支配方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

- 境界条件

$$u = 0 @ x = 0$$

$$u = 0 @ x = 1$$

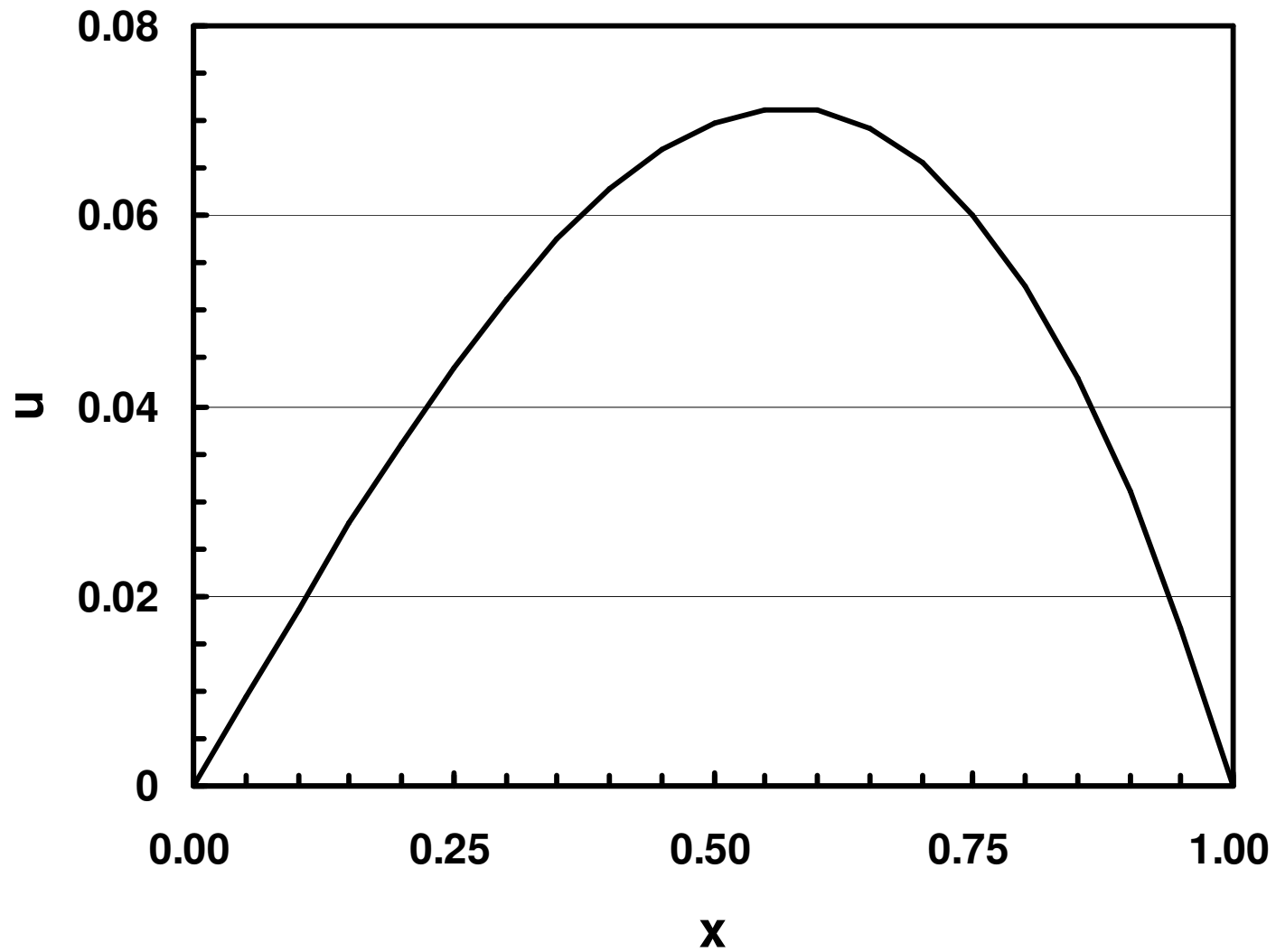
固定境界条件(第一種境界条件,
Dirichlet型境界条件とも呼ぶ)

従属変数の微分係数が境界条件として
与えられる場合を第二種またはNeumann型
境界条件と呼ぶ)

- 厳密解 (確かめてみよ)

$$u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

厳密解 $u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$



例題 (2/2)

- 近似解を以下のように仮定する：

$$u = x(1-x)(a_1 + a_2x) = x(1-x)a_1 + x^2(1-x)a_2 = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2$$

$$\Psi_1 = x(1-x), \quad \Psi_2 = x^2(1-x)$$

試行関数: $u=0$ @ $x=0, 1$ を満たす

- 残差は以下のように表される：

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- この問題に重みつき残差法の各手法を適用してみよう。
 - 未知数（試行関数）は a_1, a_2 の2つなので、（独立な）重み関数も2つになる

選点法 (Collocation Method)

- $n=2$ であるので, $x=1/4$, $x=1/2$ を選点とすると :

$$R(a_1, a_2, \frac{1}{4}) = 0, \quad R(a_1, a_2, \frac{1}{2}) = 0$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって :

$$\begin{bmatrix} 29/16 & -35/64 \\ 7/4 & 7/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{6}{31}, \quad a_2 = \frac{40}{217}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{217} (42 + 40x)$$

最小二乗法 (Least Square Method)

- 定義により :

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial a_1} = -2 + x - x^2, \quad w_2 = \frac{\partial R}{\partial a_2} = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって :

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \frac{\partial R}{\partial a_1} dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (-2 + x - x^2) dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \frac{\partial R}{\partial a_2} dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (2 - 6x + x^2 - x^3) dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 202 & 101 \\ 707 & 1572 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 399 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{46161}{246137}, \quad a_2 = \frac{41713}{246137}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{246137} (46161 + 41713x)$$

ガラーキン法 (Galerkin Method)

- 定義により :

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x), \quad w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって :

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \Psi_1 dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (x - x^2) dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \Psi_2 dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (x^2 - x^3) dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369} (71 + 63x)$$

計算結果の比較

X	Analytical	Collocation 0.25-0.50	Collocation 0.33-0.67	Least- Square	Galerkin
0.25	0.04401	0.04493	0.04462	0.04311	0.04408
0.50	0.06975	0.07143	0.07031	0.06807	0.06944
0.75	0.06006	0.06221	0.06084	0.05900	0.06009

- ガラーキン法が最も精度がよい。
 - 汎関数がある問題については、変分法とガラーキン法は答えが一致する（→菊地・岡部，矢川・宮崎）
 - 一種の解析解
- 多くの商用コードでガラーキン法を使用。
- 本授業でも今後ガラーキン法を扱う。
- 高レイノルズ数Navier-Stokes方程式など，最小二乗法を適用して安定化する場合もある。

- 有限要素法入門
- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

(再出) 変分法 (Ritz法) (1/2)

- 多くの問題において汎関数 (functional) $I(u)$ が存在
- 汎関数が極値を持つために u が満たすべき微分方程式をオイラー (Euler) 方程式という。
 - 汎関数 $I(u)$ を停留させる u は Euler 方程式を満たす
- 例えば, 弾性力学の支配方程式 (平衡方程式, 仮想仕事の原理) と等価な汎関数は, 「最小ポテンシャルエネルギーの原理 (ひずみエネルギー最小の法則)」である。

(再出) 変分法 (Ritz法) (2/2)

- 以下の近似解の式を $I(u)$ に代入し, $I_M = I(u_M)$ が極値になるようにすれば, 係数 a_i が求められ u_M が決定される。

$$u_M = \sum_{i=1}^M a_i \Psi_i$$

- 変分法は偏微分方程式の近似解法としては, 理論的, 数学的, 物理的な背景が堅牢で理解しやすいのであるが, 等価な変分問題を持つような微分方程式で無いと適用できない:
 - 本授業では重み付き残差法を使用する
 - 厳密解, 解析解に近いものと考えられる

変分法による近似解例 (1/4)

- 汎関数

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx$$

- 境界条件

$$u = 0 @ x = 0$$

$$u = 0 @ x = 1$$

- 汎関数 $I(u)$ を上記の境界条件のもとに停留させる u を求めよ
 - 対応するオイラー方程式は以下である (重み付き残差法と同じ) :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(B-1)

変分法による近似解例 (2/4)

- 2回連続微分可能な関数 u に対して, n 次の試行関数を以下のように仮定する:

$$u_n = x \cdot (1-x) \cdot (a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}) \quad (\text{B-2})$$

- 試行関数の次数 n を増加させることにより, u_n は真の解 u に近づくことから, 汎関数 $I(u)$ も $I(u_n)$ によって近似可能である
 - $I(u_n)$ が停留すれば, $I(u)$ も停留する
- 未知係数 a_k に対して, 以下の停留条件を満たす a_k を求めれば良い:

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1 \sim n) \quad (\text{B-3})$$

リッツ (Ritz) 法

- 式(B-3)は $a_1 \sim a_n$ を未知数とする連立一次方程式となる
- この解を式(B-2)に代入することにより, $I(u_n)$ を停留させる解 (すなわちオイラー方程式(B-1)を満たす解の近似解) が得られる
 - 近似解ではあるが, 停留条件を厳密に満たす
- このように, 関数 u を有限個の試行関数の列に展開し, その際に導入される未知定数によって汎関数を停留する解を求める方法をリッツ (Ritz) 法と呼ぶ

変分法による近似解例 (3/4)

- リッツ法適用, $n=2$

$$u_2 = x \cdot (1-x) \cdot (a_1 + a_2 x) = x \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^2 \cdot (1-x) \cdot a_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow & \left[\int_0^1 (1-x-x^2)(1-3x+x^2) dx \right] a_1 \\ & + \left[\int_0^1 \left\{ (1-2x)(2x-3x^2) - x^3(1-x)^2 \right\} dx \right] a_2 - \int_0^1 x^2(1-x) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow & \left[\int_0^1 \left\{ (1-2x)(2x-3x^2) - x^3(1-x)^2 \right\} dx \right] a_1 \\ & + \left[\int_0^1 (2x-3x^2+x^3)(2x-2x^2-x^3) dx \right] a_2 - \int_0^1 x^3(1-x) dx = 0 \end{aligned}$$

(3/4) の補足 (1/3)

- リッツ法適用, $n=2$

$$u_2 = x \cdot (1-x) \cdot (a_1 + a_2 x) = x \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^2 \cdot (1-x) \cdot a_2$$

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu =$$

$$\frac{1}{2} \left[(1-2x)a_1 + (2x-3x^2)a_2 \right]^2 - \frac{1}{2} \left[x \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^2 \cdot (1-x) \cdot a_2 \right]^2 - \left[x^2 \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^3 \cdot (1-x) \cdot a_2 \right]$$

(3/4) の補足 (2/3)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu =$$

$$\frac{1}{2} \left[(1-2x)a_1 + (2x-3x^2)a_2 \right]^2 - \frac{1}{2} \left[x \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^2 \cdot (1-x) \cdot a_2 \right]^2 \\ - \left[x^2 \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^3 \cdot (1-x) \cdot a_2 \right]$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{ (1-2x)^2 - x^2 \cdot (1-x)^2 \right\} dx \right] a_1 \\ + \left[\int_0^1 \left\{ (1-2x)(2x-3x^2) - x^3 \cdot (1-x)^2 \right\} dx \right] a_2 - \int_0^1 x^2 \cdot (1-x) dx = 0$$

(3/4) の補足 (3/3)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu =$$

$$\frac{1}{2} [(1-2x)a_1 + (2x-3x^2)a_2]^2 - \frac{1}{2} [x \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^2 \cdot (1-x) \cdot a_2]^2 \\ - [x^2 \cdot (1-x) \cdot a_1 + x^3 \cdot (1-x) \cdot a_2]$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \{(1-2x)(2x-3x^2) - x^3 \cdot (1-x)^2\} dx \right] a_1 \\ + \left[\int_0^1 \{(2-3x^2)^2 - x^4 \cdot (1-x)^2\} dx \right] a_2 - \int_0^1 x^3 \cdot (1-x) dx = 0$$

変分法による近似解例 (4/4)

- これを整理すると以下のようになる：

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369} (71 + 63x)$$

- この結果はガラーキン法と一致する
 - 決して偶然ではない

ガラーキン法 (Galerkin Method)

- 定義により : 試行関数: $u=0$ @ $x=0,1$ を満たす

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x), \quad w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって :

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \Psi_1 dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (x - x^2) dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x) \Psi_2 dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x) (x^2 - x^3) dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369} (71 + 63x)$$

リッツ法とガラーキン法 (1/4)

$$u_2 = x \cdot (1-x) \cdot (a_1 + a_2 x) = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 \right] = \frac{du_2}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{du_2}{dx} \right) = \left(a_1 \frac{dw_1}{dx} + a_2 \frac{dw_2}{dx} \right) \frac{dw_1}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left[\frac{1}{2} u_2^2 \right] = u_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial a_1} = (a_1 w_1 + a_2 w_2) \cdot w_1$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} [xu_2] = x \cdot \frac{\partial u_2}{\partial a_1} = x \cdot w_1$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{ \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 a_1 + \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} a_2 \right\} dx \right] - \left[\int_0^1 w_1 \{ (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \} dx \right] = 0$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{ \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} a_1 + \left(\frac{dw_2}{dx} \right)^2 a_2 \right\} dx \right] - \left[\int_0^1 w_2 \{ (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \} dx \right] = 0$$

リッツ法とガラーキン法 (2/4)

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{ \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 a_1 + \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} a_2 \right\} dx \right] - \left[\int_0^1 w_1 \{ (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \} dx \right] = 0$$

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x),$$

$$w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w_1 \frac{dw_1}{dx} \right) = \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_1}{dx} + w_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w_1 \frac{dw_2}{dx} \right) = \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} + w_1 \frac{d^2 w_2}{dx^2}$$

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 a_1 \right\} dx = \left(a_1 w_1 \frac{dw_1}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 w_1 \left\{ \frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 \right\} dx = - \int_0^1 w_1 \left\{ \frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 \right\} dx$$

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} \right) a_2 \right\} dx = \left(a_2 w_1 \frac{dw_2}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 w_1 \left\{ \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right\} dx = - \int_0^1 w_1 \left\{ \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right\} dx$$

リッツ法とガラーキン法 (3/4)

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$- \int_0^1 w_1 \left\{ \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 + \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right) + (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \right\} dx = 0$$

$$- \int_0^1 w_1 \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} + u_2 + x \right) dx = 0$$

ガラーキン法そのもの

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow$$

$$- \int_0^1 w_2 \left\{ \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 + \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right) + (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \right\} dx = 0$$

$$- \int_0^1 w_2 \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} + u_2 + x \right) dx = 0$$

リッツ法とガラーキン法 (4/4)

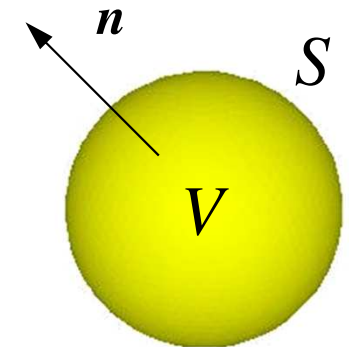
- 今回示したのは非常に特殊な例ではあるが、一般的に汎関数が存在する場合、ガラーキン法とリッツ法は一致する
- リッツ法は近似解ではあるが、オイラー方程式を厳密に満たしているので「厳密解」により近いと言える
 - ガラーキン法の「精度」が高い理由
 - この事実だけをとりにあえず覚えておいてください
- 汎関数が存在しない場合は成立しない
 - 精度、安定性等の観点からガラーキン法が最良でない場合もある

- 有限要素法入門
- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）
- おまけ ガウスの定理, グリーンの定理

ガウスの定理 : Gauss's Theorem

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_S (Un_x + Vn_y + Wn_z) dS$$

- 三次元デカルト座標 (x, y, z)
- 滑らかな閉曲面 S によって囲まれた V
- V 内で定義される, 3つの連続関数
 - $U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$
- 曲面 S 上で外向きに引いた法線ベクトル n
 - n_x, n_y, n_z : 方向余弦



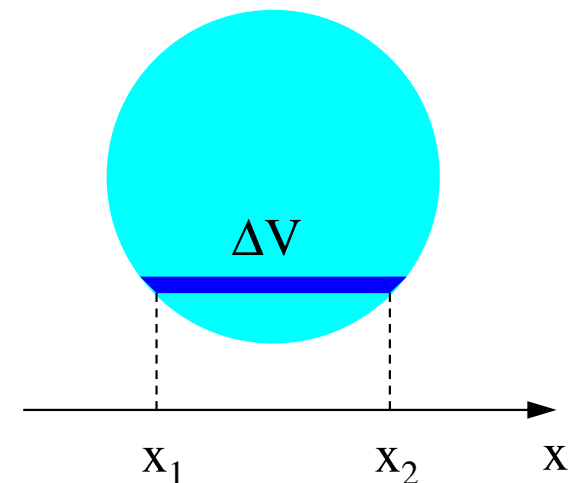
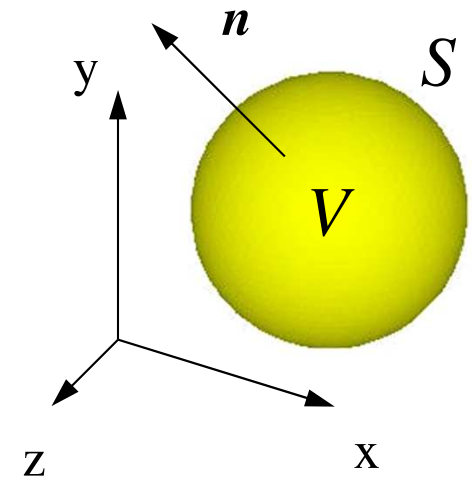
ガウスの定理 : Gauss's Theorem

簡単な証明 (1/3)

- x軸に平行な微小角柱を考えると :

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial x} dV = \iint dy dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

$$= \iint U(x_2, y, z) dy dz - \iint U(x_1, y, z) dy dz$$



ガウスの定理 : Gauss's Theorem

簡単な証明 (2/3)

- 角柱が表面 S から切り取る面積を dS とすると :

$$dy dz = +n_x dS \quad (\text{if } n_x \geq 0)$$

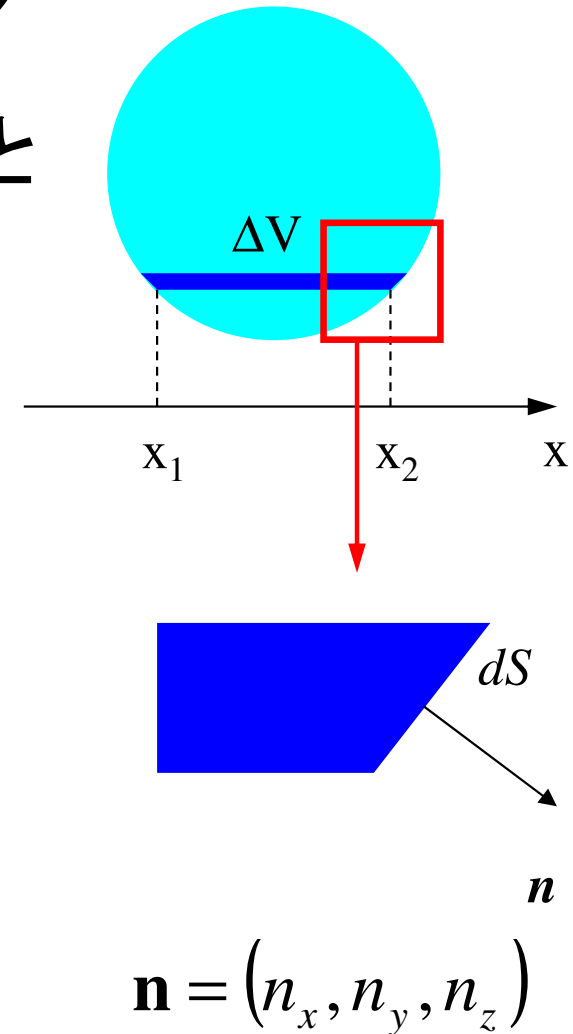
$$dy dz = -n_x dS \quad (\text{if } n_x \leq 0)$$

- したがって :

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial x} dV = \iint dy dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

$$= \iint U(x_2, y, z) dy dz - \iint U(x_1, y, z) dy dz$$

$$= \int_{\Delta S_1} U n_x dS + \int_{\Delta S_2} U n_x dS$$



ガウスの定理 : Gauss's Theorem

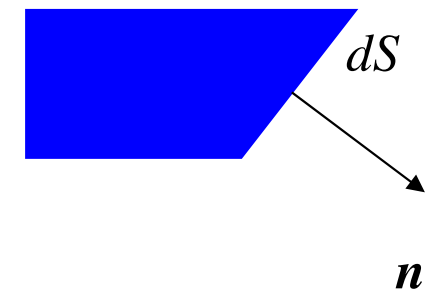
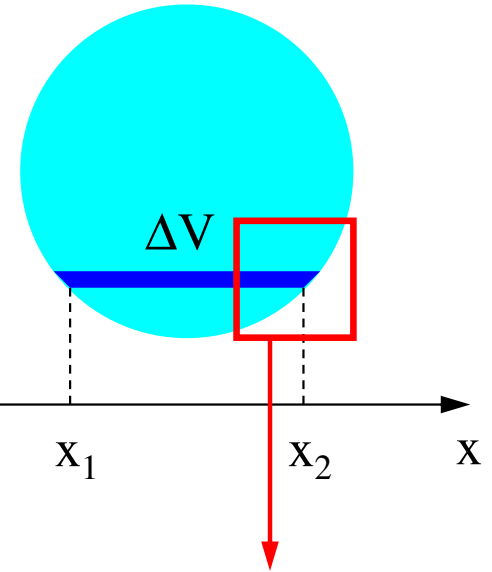
簡単な証明 (3/3)

- これを全領域に拡張すると :

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial x} dV = \int_S U n_x dS$$

- y,z方向にも同様にして以下が成立 :

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_S (U n_x + V n_y + W n_z) dS$$



$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

グリーンンの定理 (1/2)

- 以下のように仮定すると :

$$U = A \frac{\partial B}{\partial x}, \quad V = A \frac{\partial B}{\partial y}, \quad W = A \frac{\partial B}{\partial z}$$

- 以下が導かれる :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = A \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

- これを積分してガウスの定理を適用すると以下が得られる :

$$\int_V A \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) dV + \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \right) dV$$

$$= \int_S (Un_x + Vn_y + Wn_z) dS = \int_S A \left(\frac{\partial B}{\partial x} n_x + \frac{\partial B}{\partial y} n_y + \frac{\partial B}{\partial z} n_z \right) dS$$

グリーンの定理 (2/2)

- (続き)

$$\int_S A \left(\frac{\partial B}{\partial x} n_x + \frac{\partial B}{\partial y} n_y + \frac{\partial B}{\partial z} n_z \right) dS = \int_S A \left(\frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS$$

$$= \int_S A \frac{\partial B}{\partial n} dS \quad \frac{\partial B}{\partial n} : B \text{の法線方向勾配}$$

- 結果として以下のようになる

$$\int_V A \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) dV = \int_S A \frac{\partial B}{\partial n} dS - \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \right) dV$$

- 二階微分の一階微分への置き換え
 - 部分積分

ベクトル表記すると

- ガウスの定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_S \mathbf{w}^T \mathbf{n} \, dS$$

- グリーンの定理

$$\int_V v \Delta u \, dV = \int_S (v \nabla u)^T \mathbf{n} \, dS - \int_V (\nabla^T v)(\nabla u) \, dV$$

第174回お試しアカウント付き 並列プログラミング講習会

「一日速習：有限要素法プログラミング
徹底入門」

2022年4月14日（火）

105分×4.0-4.5（正味420-450分程度）

- | | |
|-------------|------------|
| 09:00-09:45 | 有限要素法入門 |
| 09:45-12:30 | 一次元有限要素法 |
| 13:30-16:00 | 三次元有限要素法 |
| 16:00-17:00 | 並列有限要素法への道 |
| 17:00-17:15 | 討論質疑等 |