

証明：ヤコビ法の収束（2/2）

- 対角優位な行列のスペクトル半径は1より小さい:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \underline{\text{列方向の絶対値の和の最大値}}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \underline{\text{行方向の絶対値の和の最大値}}$$

$$\therefore \|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$

$$\rho(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})) \leq \|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$