

# ベクトル・行列のノルム (Norm) $\|\cdot\|$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$$

ベクトル成分の大きさには無関係,  
 $\|\mathbf{x}\|=1$ としても一般性を失わない

- $p=1$ : 1-ノルム,  $p=2$ : 2-ノルム (ユークリッドノルム)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \text{列方向の絶対値の和の最大値}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_i \left( \left| \lambda_i \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \right) \quad \lambda_i(\mathbf{B}) (i = 1, 2, \dots, n)$$

行列 $\mathbf{B}$ の固有値

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$