演　習

以下の方程式を「完全ピボッティング」を用いた「ガウスの消去法」によって解きなさい。

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}
$$

傾向（総提出数91）

	○（正解）	△（前進消去のみ，ケアレスミス等）	×（前進消去を得るに至っていない）	小計
完全ピボッティング	22	13	11	46
部分ピボッティング			3	3
ピボッティング無し	3		3	6
その他の方法	15	1	7	23
不明			13	13
小計	40	14	37	91

③で多かった答え：階段行列

正しい答えが出るが，プログラムはガウスの消去法の方が簡単（単純な構造）

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -7 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 15/7 & 0 \end{pmatrix}$$

解 説（1/6）

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

を完全ピボッティングで解く

前進消去　拡張された行列表現

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & 4 \\
2 & 3 & 1 & 1 \\
-1 & -4 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 3 &
\end{array}\right)
$$

各列に対応する番号を記述
（列交換しなければ不変）

解説（2/6）

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & \boxed{-4} & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \end{array}\right) \xrightarrow{1列\Leftrightarrow 2列} \left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1行\Leftrightarrow 3行} \left(\begin{array}{cccc} -4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$$

絶対値最大の項を見つけ、
ピボットとする.

解 説（3/6）

$$
\left(\begin{array}{cccc}
\boxed{-4} & -1 & 2 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 1 \\
-2 & 1 & 1 & 4 \\
\hline
2 & 1 & 3 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{1\text{行}\times(-1/4)}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1/4 & -1/2 & -1/2 \\
3 & 2 & 1 & 1 \\
-2 & 1 & 1 & 4 \\
\hline
2 & 1 & 3 &
\end{array}\right)
$$

2行−1行×3
3行＋1行×2

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1/4 & -1/2 & -1/2 \\
0 & 5/4 & \boxed{5/2} & 5/2 \\
0 & 3/2 & 0 & 3 \\
\hline
2 & 1 & 3 &
\end{array}\right)
$$

絶対値最大の項を見つけ、
つぎのピボットとする.

解 説（4/6）

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1/4 & -1/2 & -1/2 \\
0 & 5/4 & \boxed{5/2} & 5/2 \\
0 & 3/2 & 0 & 3 \\
\hline
2 & 1 & 3 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{2列⇔3列}}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\
0 & \boxed{5/2} & 5/4 & 5/2 \\
0 & 0 & 3/2 & 3 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{2行}\times(2/5)}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 3/2 & 3 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{3行}\times(2/3)}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
$$

解 説（5/6）

ここまで、まとめると

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & 4 \\
2 & 3 & 1 & 1 \\
-1 & -4 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 3 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{前進消去}}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
$$

前進消去終了

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\
0 & 1 & 1/2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{後退代入}}
$$

$$x'_3 = 2$$

$$x'_2 = 1 - \frac{1}{2} x'_3 = 0$$

$$x'_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times x'_2 - \frac{1}{4} \times x'_3 = -1$$

解 説（6/6）

列を入れ替えたことを考慮する.

$$x_1' \Leftrightarrow x_2$$

$$x_2' \Leftrightarrow x_3$$

$$x_3' \Leftrightarrow x_1$$

ゆえに、もとの方程式の解は、

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

① ピボットa_{kk}の決定
② ピボットでk行を割る
③ k列の消去
④ $k=k+1$として①へもどり,
$k=n$となるまで繰り返す
⑤ 後退代入!＋再入替

ピボッティングが必要となるのは?

a_{kk}が0または絶対値が非常に小さい場合

「行に非零定数をかける」変形で成分の値は変わる

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{kk}} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n} & b_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

ピボット(pivot:軸)

$$p = a_{kk}$$

ここをゼロにするために

k 行を a_{kk} で割り

$$\frac{a_{kj}}{p} \to a_{kj} \qquad \frac{b_k}{p} \to b_k$$

a_{ik} 倍を i 行から引く

$$\begin{cases} a_{ij} - a_{ik}a_{kj} \to a_{ij} \\ b_i - a_{ik}b_k \to b_i \end{cases}$$

スケーリング：対角成分を1にするように調整

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{b},\ \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|a_{11}|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|a_{22}|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{|a_{nn}|} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} = \left(\frac{a_{ij}}{\sqrt{|a_{ii}||a_{jj}|}} \right)$$