弾性力学入門

2012年夏学期

中島 研吾

科学技術計算Ｉ（4820-1027）・コンピュータ科学特別講義Ｉ（4810-1204）

- 弾性力学
  - 弾性力学の対象
  - 応力
  - 弾性力学の支配方程式

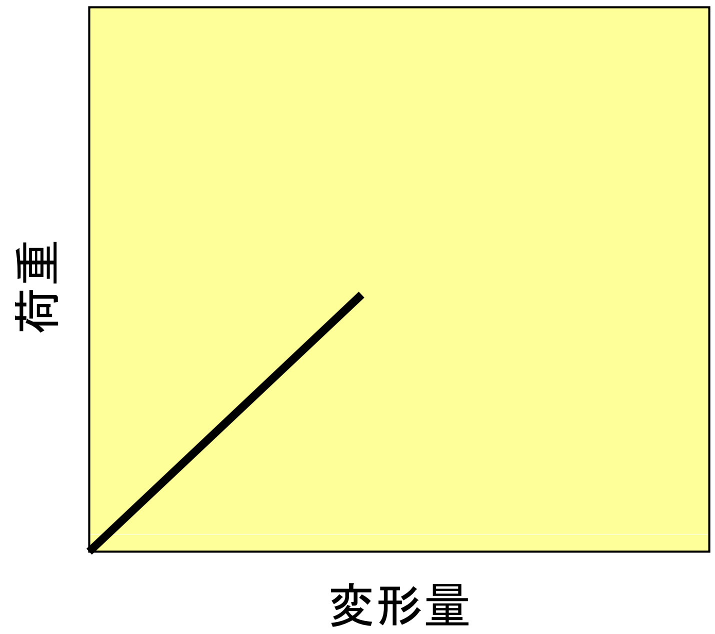
弾性力学

- 連続体力学（Continuum Mechanics）固体力学（Solid Mechanics）の一部
- 弾性体（Elastic Material）を対象
  - 弾性論（Theory of Elasticity）

- 中島の学生時代（航空学科）
  - 材料力学（2年冬，2コマ）：船舶，応物
  - 材料力学演習（3年夏，1コマ）
  - 材料強弱実験（3年夏，1コマ）
  - 弾性力学Ⅰ（3年夏，1コマ）
  - 弾性力学Ⅱ（3年冬，1コマ）

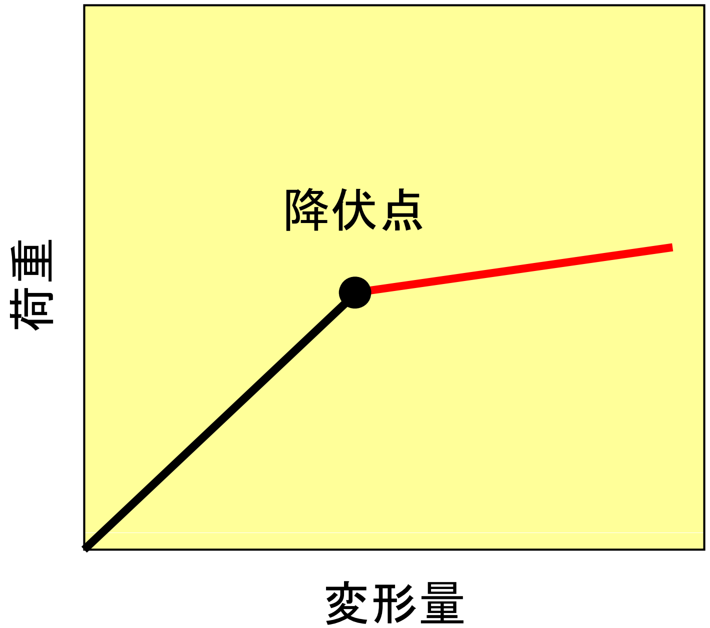
弾性体とは？

- 「荷重」と「変形量」が比例
  - Hookeの法則
  - 例
    - バネ　$kx = -mg$
    - 金属，繊維，樹脂・・・
  - 「荷重」を除くと「変形量」は0になる
    - もとの形状にもどる



変形量（荷重）が増えると弾性でなくなる

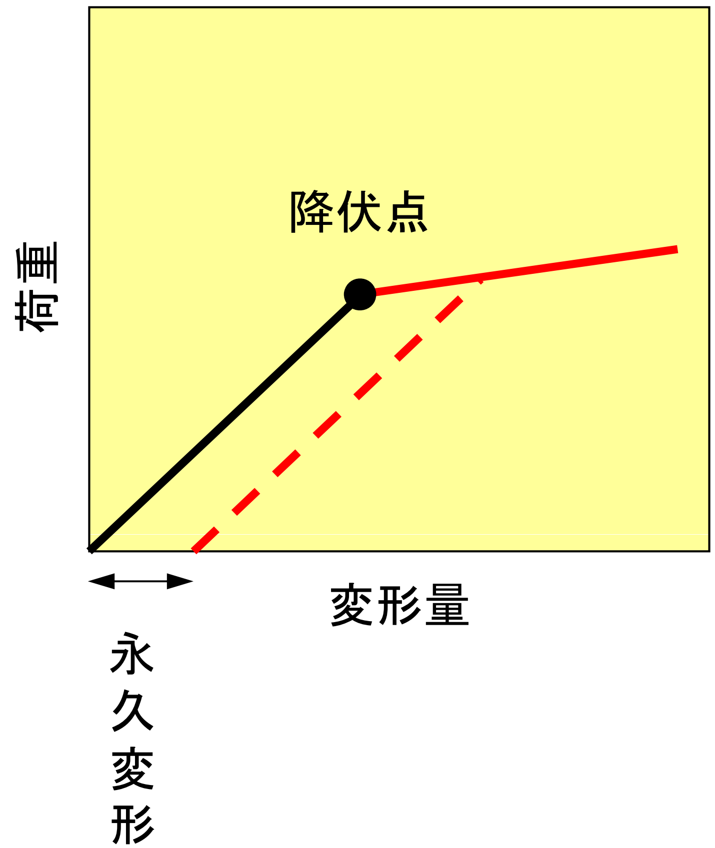
- 降伏
  - 降伏点
  - 弾性限界
- 非弾性
- 塑性（Plastic Material）



弾性限界を超えると，荷重が0になっても変形量は0にならない

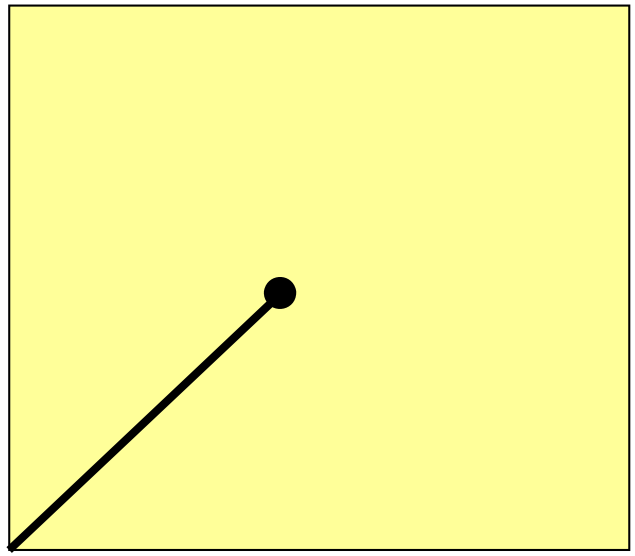
- 元の形状にもどらない
- 永久変形

- Tシャツの首
- はさみすぎたクリップ
- 伸びすぎたバネ，ゴム



弾性力学の扱う範囲

- 弾性限界，降伏点まで
  - 変形量（変位）は小さい
  - 微小変形理論
    - 物理的な変形量はあるが，形状は変わらないと仮定
  - 線形



- 塑性，非弾性⇒非線形
  - 研究としてはより難しく，おもしろい
- 工学的には「弾性」の方が重要
  - 弾性限界を超えたものは再利用不可（例外：板金加工等）
    - いかに弾性限界内で荷重，変形を抑制するかが設計としては問題
  - 塑性，非弾性は事故時：衝突

- 弾性力学
  - 弾性力学の対象
  - 応力
  - 弾性力学の支配方程式

応力とは？（1/6）

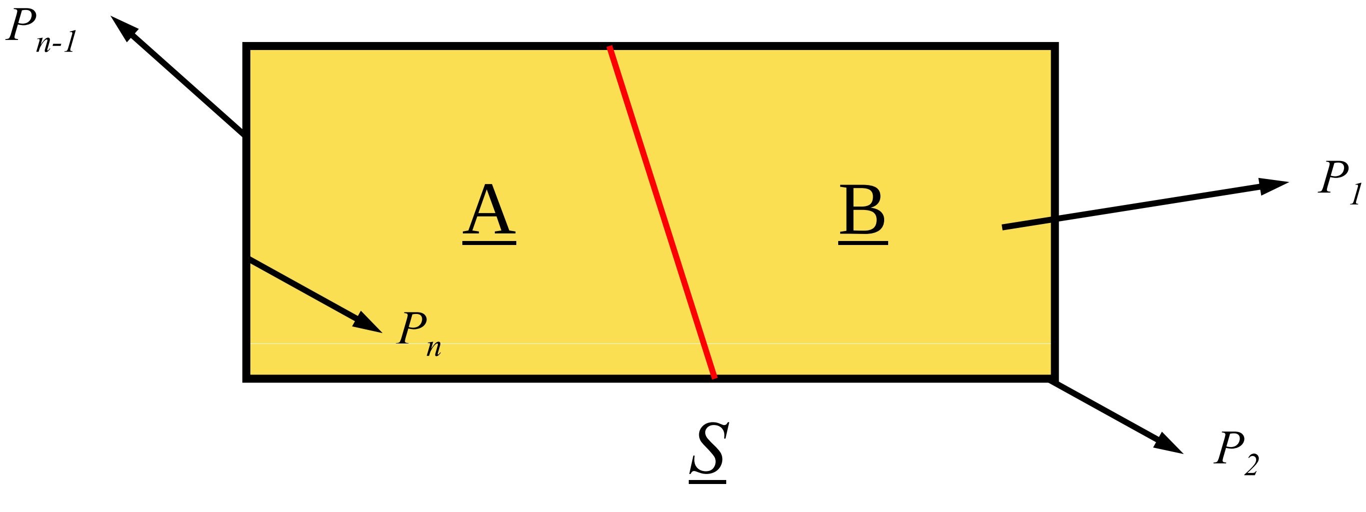
- 物体（ここでは弾性体）に外力（external force）が作用すると，物体は変形し，物体を構成する分子間の力によって内力（internal force）を発生させ，外力に抵抗する。
- 物体はこの内力と外力が釣り合うところまで変形する
- 外力
  - 表面力：軸力，荷重，内圧など
  - 物体力：重力，遠心力，磁力など
- 外力，内力は「大きさ」と「方向・向き」を持ったベクトル量

応力とは？（2/6）

- ある弾性体がn個の外力を受けて釣り合っているものとする

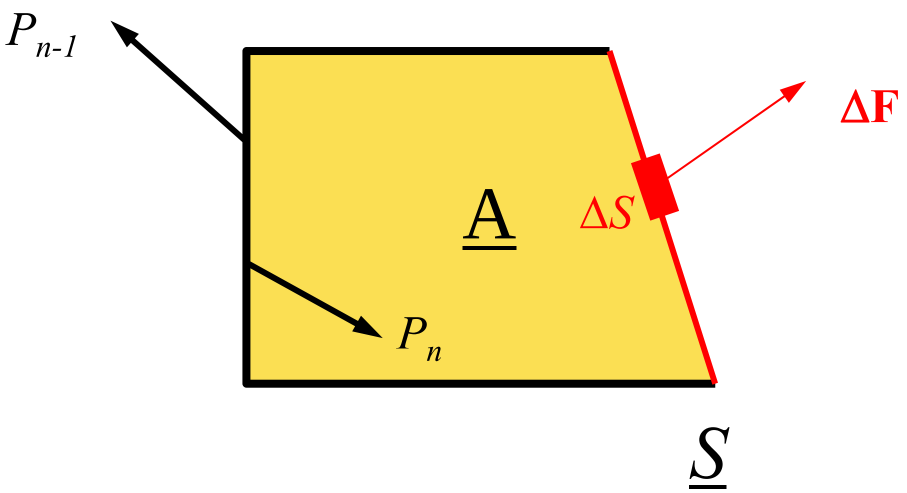
応力とは？（3/6）

- 仮想的な断面Sで切断すると，面Sを通して，A部分はB部分に，B部分はA部分に内力を作用



応力とは？（4/6）

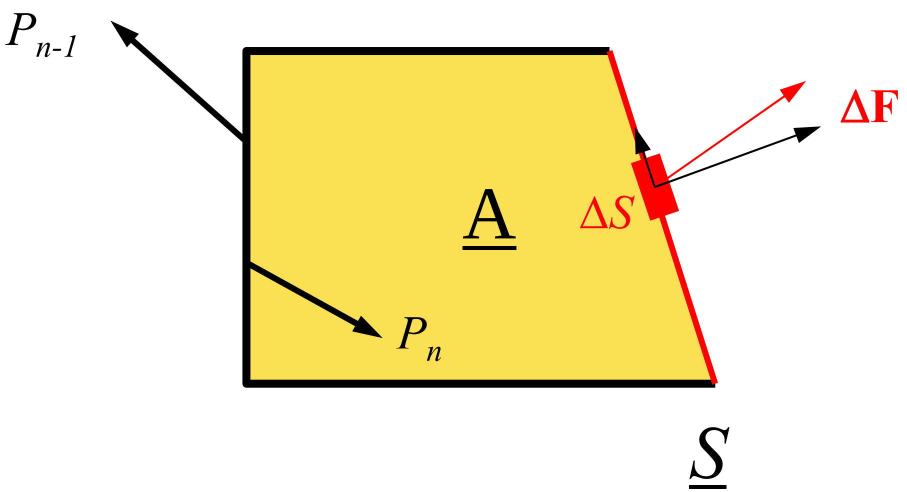
- A部分のS面上に微小面積要素ΔSを考えて，S面上に作用する分布内力のうちΔSに作用しているものの合力を$\mathbf{\Delta F}$（ベクトル）とする
- 単位面積当たりの平均力$\mathbf{\Delta F}/\Delta S$の$\Delta S$を無限小とした極限値$\mathbf{p}$を<u>応力ベクトル</u>（stress vector）と言う



$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\mathbf{\Delta F}}{\Delta S}$$

応力とは？（5/6）

- 応力：単位面積当たりの力（のベクトル）
  - 引張：正，圧縮：負
- 面に対して・・・
  - 垂直：垂直応力（normal stress）
  - 平行：せん断応力（shear stress）
- 設計に当たって重要なポイント：降伏応力



$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

応力とは？（6/6）

- 直交座標系に関する応力成分
  - 三次元：9成分
  - 垂直応力（normal stress） σ
  - せん断応力（shear stress）τ

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

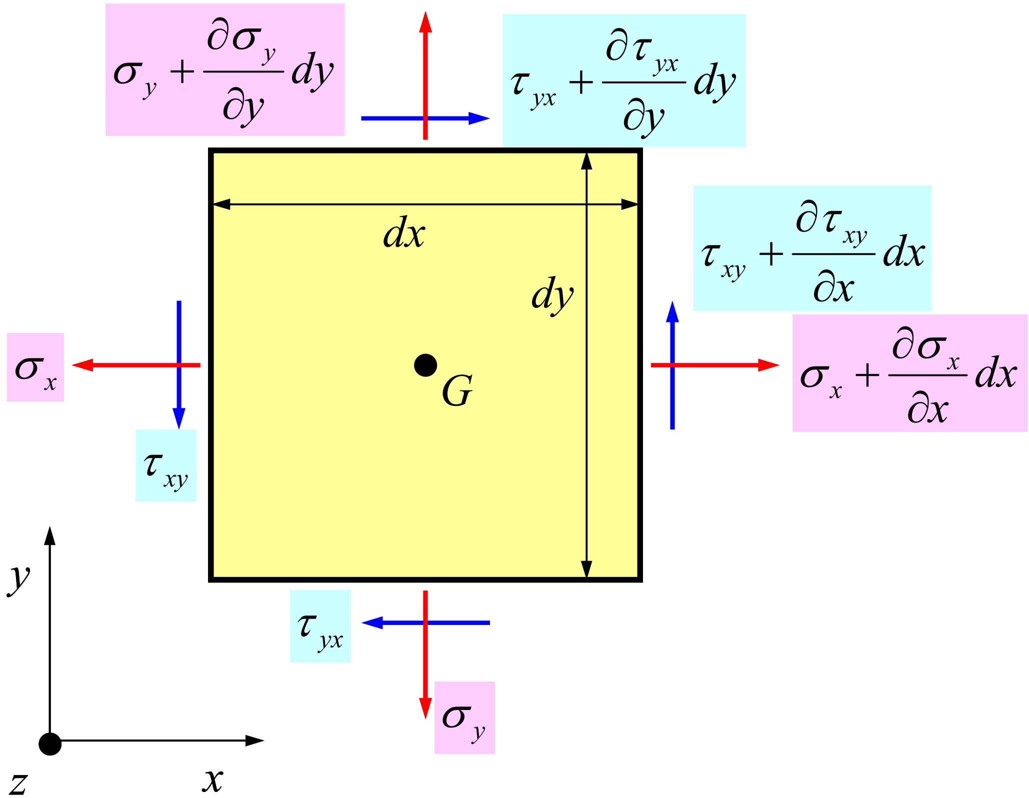
- 弾性力学
  - 弾性力学の対象
  - 応力
  - 弾性力学の支配方程式

弾性力学の支配方程式

- つりあい式（equilibrium equations）
- 適合条件式（compatibility conditions）
  - 変位～ひずみ関係式
- 構成式（constitutive equations）
  - 応力～ひずみ関係式

- 主に二次元モデルを使用して説明する

つりあい式
X方向
二次元微小要素



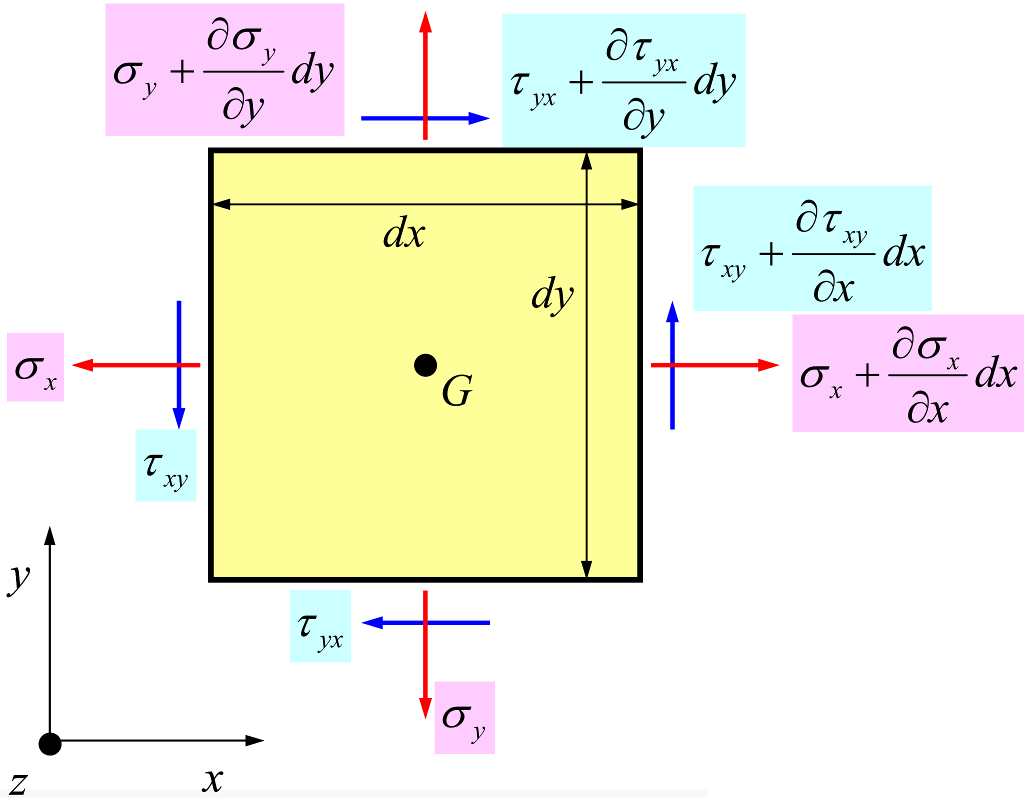
$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x \cdot dy \times 1$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} \cdot dx \times 1 + \underline{X} \cdot dx \cdot dy \times 1 = 0$$

物体力
X方向成分

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \underline{X} = 0$$

つりあい式
Y方向
二次元微小要素



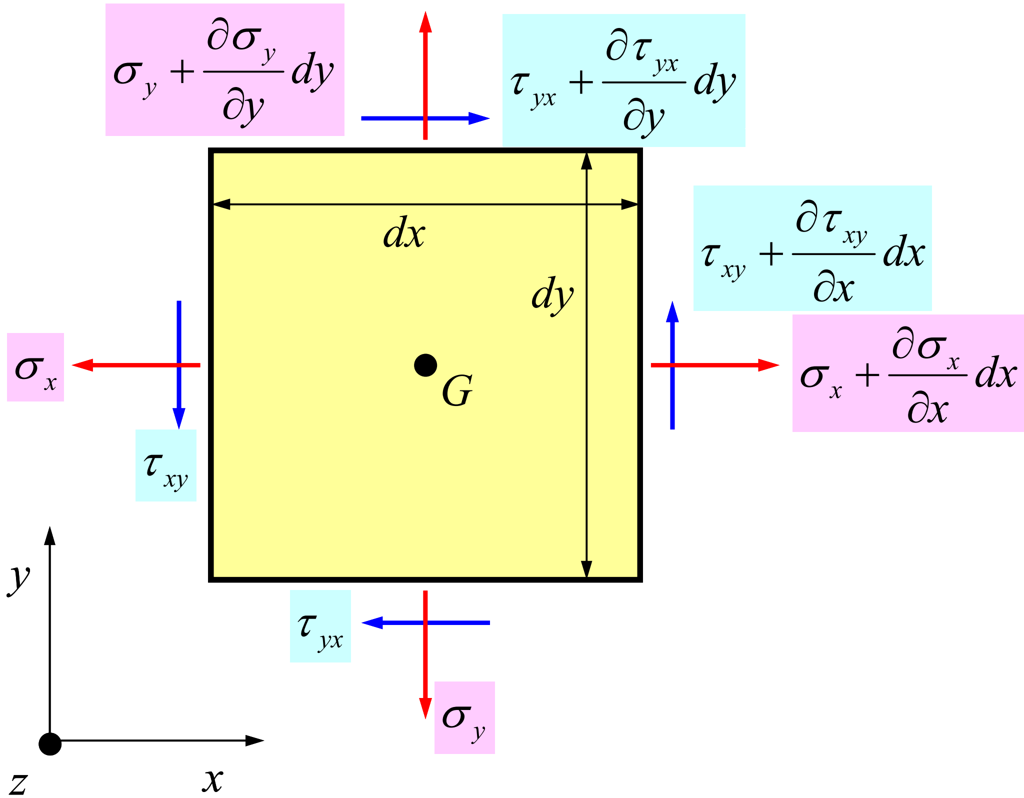
$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx \times 1 - \sigma_y \cdot dx \times 1$$

$$+\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \times 1 - \tau_{xy} \cdot dy \times 1 + \underline{Y} \cdot dx \cdot dy \times 1 = 0$$

物体力
Y方向成分

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \underline{Y} = 0$$

Z軸まわりモーメント@G点



$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2}$$

$$-\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0$$

$$\therefore \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

二次元のつりあい式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

三次元のつりあい式
応力の独立な成分は6つ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

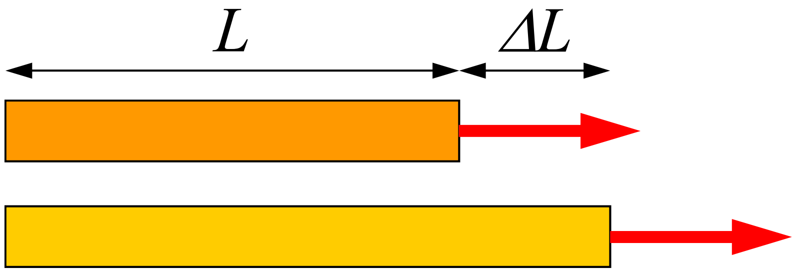
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

ひずみの概念

- 弾性力学（というか固体力学）
  - 荷重と変形量
- 応力（stress）
  - 単位面積あたりの荷重
- ひずみ（strain）
  - 相対的な変形量

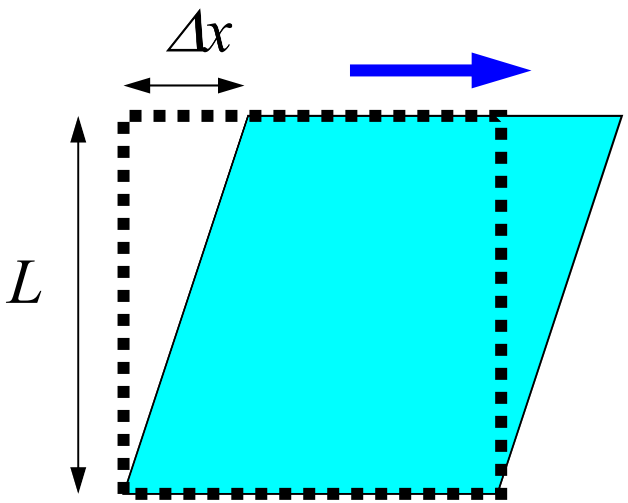
ひずみ：相対的な変形量，　変位

- 垂直ひずみ（normal strain）



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

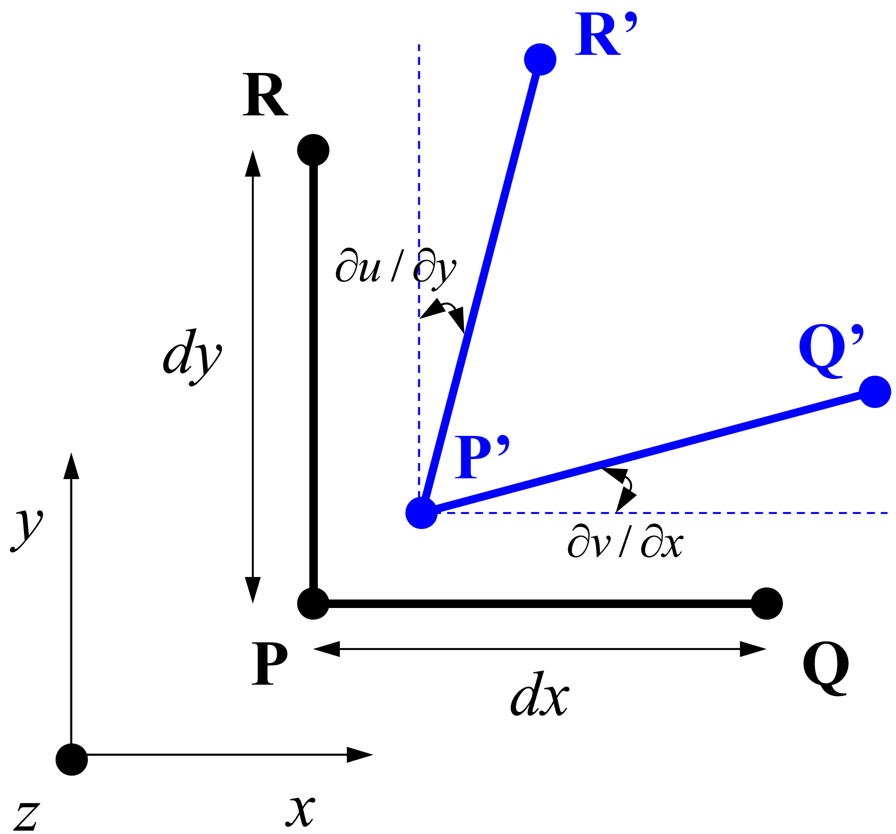
- せん断ひずみ（shear strain）



$$\gamma = \frac{\Delta x}{L}$$

ひずみ，変位の関係

- 変位（3次元）：(u, v, w)
- ここでは二次元微小要素
  - 変形前：P, Q, R，変形後：P’, Q’, R’



$$\mathrm{P}:(x, y)$$

$$\mathrm{Q}:(x+dx, y)$$

$$\mathrm{R}:(x, y+dy)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \tan\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \tan\phi$$

$$\mathrm{P'}:(x+u, y+v)$$

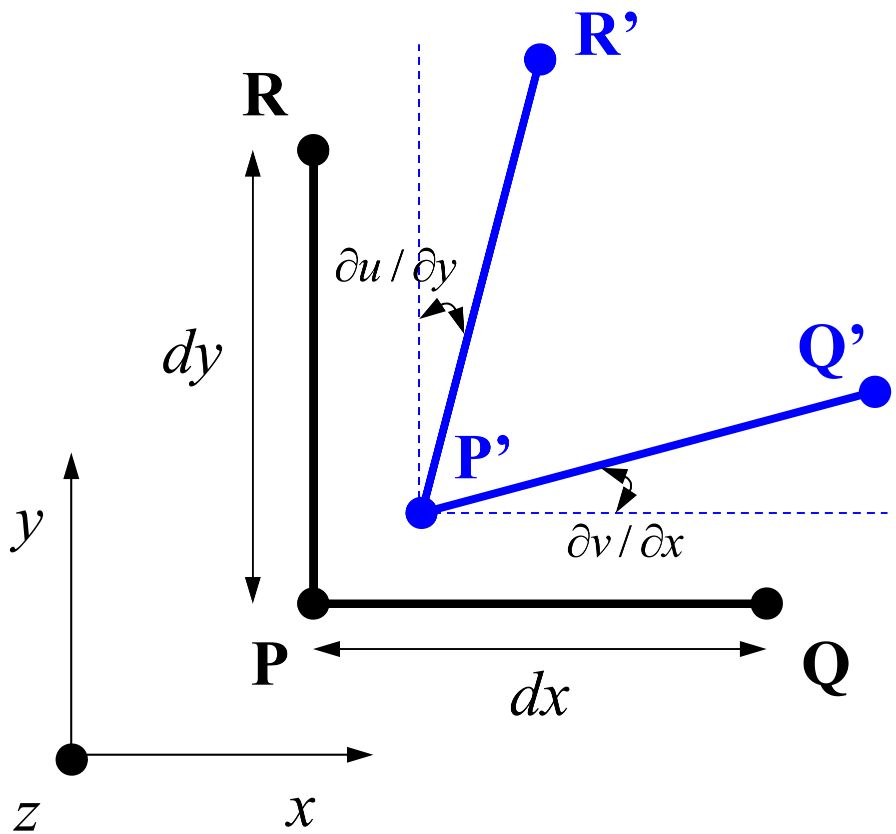
$$\mathrm{Q'}:(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx)$$

$$\mathrm{R'}:(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$$

垂直ひずみ～変位の関係

- PQ⇒P'Q'

$$\varepsilon_x = \frac{\left\{\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - (x + u)\right\} - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

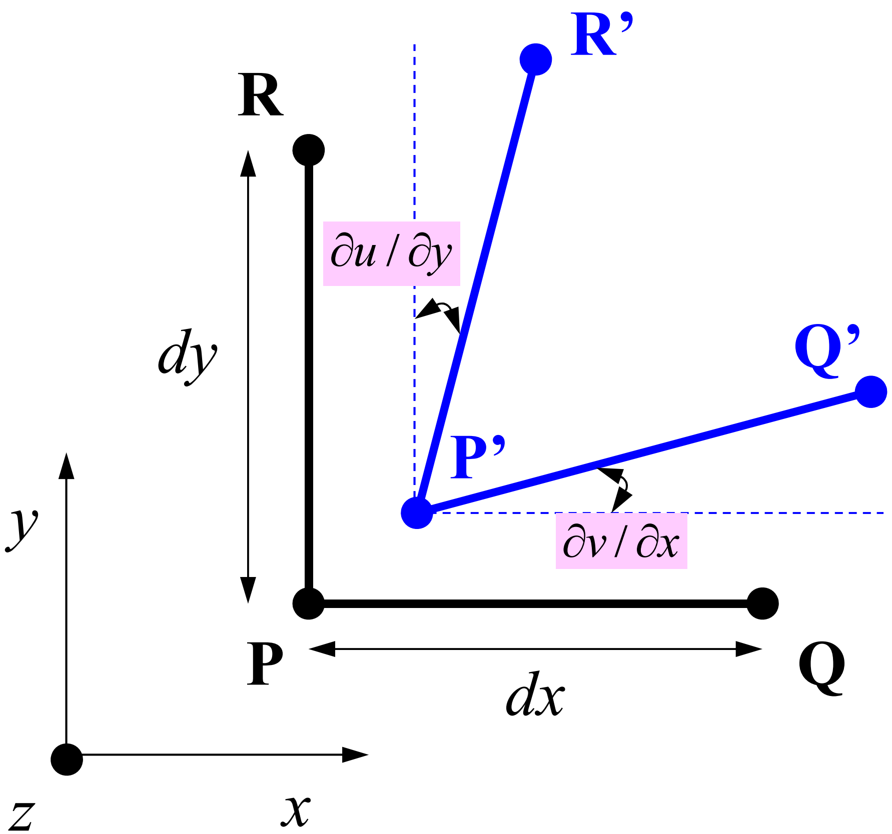


$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

せん断ひずみ～変位の関係



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

適合条件式：ひずみ成分の関係式

- 二次元

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- 三次元

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

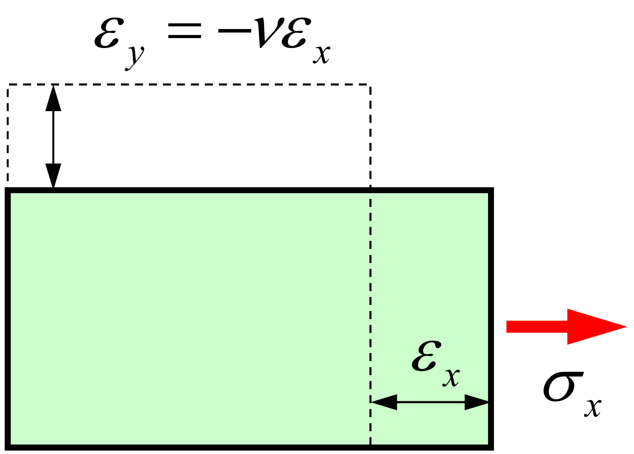
構成式：応力～ひずみ関係（1/3）

- ヤング率 E
  - 応力とひずみは比例
  - 比例定数をヤング率Eとする（各物質に固有の値）

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

- ポアソン比 ν
  - X方向に荷重をかけると，横方向（Y,Z）にも変形
  - 縮み割合をポアソン比νとする
    - 各物質に固有の値
      - 金属では0.30程度
      - 水：0.50，ゴム：ほぼ0.50⇒非圧縮

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$



構成式：応力～ひずみ関係（2/3）

- 三方向の垂直応力（$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$）の効果
  - 各ひずみ成分の足し合わせ

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right\}$$

構成式：応力～ひずみ関係（3/3）

- せん断ひずみは垂直応力（$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$）に，無関係でせん断応力$\tau$にのみ比例
  – 比例定数：横弾性係数G

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

応力⇒ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

ひずみ⇒応力関係

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\underbrace{\boxed{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix}}}_{[D]}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$$

- 非圧縮性材料（ν~0.50）の場合，特別な扱い必要

いくつかの仮定

- 等方性材料を仮定
  - ヤング率，ポアソン比が一定
  - CFRP（Carbon Fiber Reinforced Plastics，炭素繊維強化プラスチック）のような複合材料
    - 直交異方性
- ポアソン比は0.30程度

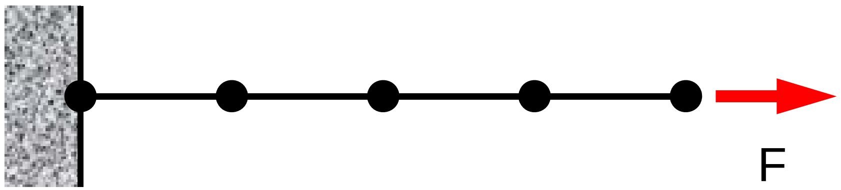
有限要素法への適用

- 変位法（Displacement-based FEM）
  - 変位量を従属変数：一般的に広く使用されている
  - 本講義でもこのアプローチを採用
- 応力法（Stress-based FEM）
  - 応力を従属変数

一次元弾性問題

1D Static Linear-Elastic Problem

- 一次元トラス要素（x方向のみに自由度）の引っ張り
  - 断面積一定 A
  - ヤング率 E
  - $u=0@X=0$, 引張力$F@X=L$



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

- 変位法
  - 「ひずみ~変位関係」を「ひずみ⇒応力関係」に代入，得られた「変位⇒応力」関係を「つりあい式」に代入

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right) + X = 0$$