# ガウスの消去法

**n元の連立一次方程式の一般形**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\Updownarrow$$

**行列表現**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

# ガウスの消去法

- Gaussian Elimination
  - 前進消去　　Forward Elimination
  - 後退代入　　Backward Substitution

# ガウスの消去法 (続き)

解を変えない変形を駆使して、以下のような形に変形する

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \cdots \quad + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

行列表現

$$
\begin{pmatrix}
1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n
\end{pmatrix}
$$

# 解を変えない変形

- スカラ倍
  - 行をスカラ倍
- スカラ倍して別の式へ加える
  - 行をスカラ倍して別の行へ加える
- 式の順番の入れ替え
  - 行を入れ替える
- 変数の入れ替え
  - 列を入れ替える

# ガウスの消去法

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \cdots \quad + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
x_n &= b'_n
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

この式の解は？

---

以下のように容易に解が求まる:

$$
\begin{aligned}
x_n &= b'_n \\
x_{n-1} &= b'_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n \\
&\vdots \\
x_1 &= b'_1 - (a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n)
\end{aligned}
$$

# 前進消去と後退代入（1/2）

**前進消去(Forward elimination)**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \cdots \quad + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

式をこのように変形すること

# 前進消去と後退代入（2/2）

$$
\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \cdots \quad + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

**後退代入（Backward substitution）**

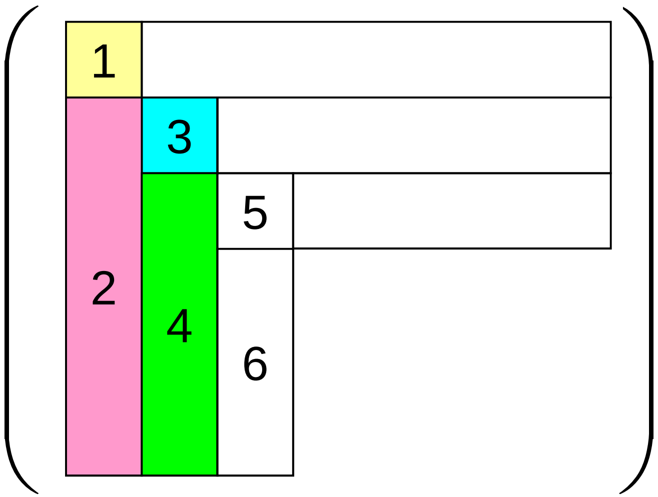
$$
\begin{aligned}
x_n &= b'_n \\
x_{n-1} &= b'_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n \\
&\vdots \\
x_1 &= b'_1 - (a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n)
\end{aligned}
$$

変形した式を用いて解を求めること

# 前進消去(行列表現)

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n
\end{pmatrix}
$$

---




1 $\quad a_{11} \to 1$

2 $\quad a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1} \to 0$

3 $\quad a_{22} \to 1$

4 $\quad a_{32}, a_{42}, \cdots, a_{n2} \to 0$

# ピボットの選択
# （誤差を防ぐために）

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \boxed{a_{kk}} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n} & b_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
$$

ピボット（pivot：軸）

$$p = a_{kk}$$

ここをゼロにするために

$k$ 行を $a_{kk}$ で割り

$$\frac{a_{kj}}{p} \to a_{kj} \qquad \frac{b_k}{p} \to b_k$$

$a_{ik}$ 倍を $i$ 行から引く

$$\begin{cases} a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \to a_{ij} \\ b_i - a_{ik} b_k \to b_i \end{cases}$$

# ピボットの選択と誤差

$|p| = 0$ ➡ 割り算が不可能

$|p|$ が小さい場合 ➡ $|a_{kj} / p| \quad |b_k / p|$ が大きくなる

➡ $\begin{cases} a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \to a_{ij} \\ b_i - a_{ik} b_k \to b_i \end{cases}$ で丸め誤差が発生

いずれにせよ、ピボット $|p|$ は大きい方が良い.

**戦略**

ピボットを大きく選びながらガウスの消去法を適用すれば誤差を抑え，精度の良い解を得ることができる.

# 部分ピボッティング

ピボッティング(pivoting):ピボット(軸)選択すること

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{Ik} & \cdots & a_{In} & b_I \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{Ik} & \cdots & a_{In} & b_I \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
$$

この中で、絶対値が最大の $a_{ik}$ を持つ行(第 $I$ 行とする)を選び, $I$ 行と $k$ 行を入れ替える.

入れ替えたあとは、普通に計算続行(解は不変)

# 完全ピボッティング

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1J} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2J} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kJ} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{Ik} & \cdots & a_{IJ} & \cdots & a_{In} & b_I \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nJ} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1J} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2J} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{IJ} & \cdots & a_{Ik} & \cdots & a_{In} & b_I \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kJ} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nJ} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
$$

この中で，絶対値が最大の $a_{ik}$ を持つ行（第 $I$ 行）と列（第 $J$ 列）を選び，$I$ 行と $k$ 行，$J$ 列と $k$ 列とを入れ替える。

入れ替えたあとは，普通に計算続行（解は不変）

ただし，「列」の入れ替えを行なった場合は，どの列とどの列を入れ替えたかを記憶しておく必要がある（変数を入れ替えたことに相当するので）。

# 数値例：部分・完全ピボッティングによるガウスの消去法

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{Bmatrix}
$$

を部分・完全ピボッティングで解く

---

**前進消去**　拡張された行列表現

$$
\left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \end{array}\right)
$$

各列に対応する番号を記述
（列交換しなければ不変）

# 例：部分ピボッティング（1/2）

**前進消去スタート**

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

**1. 1行÷2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

**2. 2行−1行，3行−1行**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

**3. 2行⇔3行（交換）**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

# 例：部分ピボッティング（2/2）

**3. 2行⇔3行（交換）**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$$

**4. 3行÷2**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**後退代入**

$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 5 - 3x_3 = 2$$
$$x_1 = 4 + x_2 - 2x_3 = 1$$

# 例：完全ピボッティング（1/5）

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{4} & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \end{array}\right) \xrightarrow{1列\Leftrightarrow 2列} \left(\begin{array}{cccc} 4 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$$

絶対値最大の項を見つけ、
ピボットとする.

$$\Big\downarrow \; 1行\times(1/4)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$$

# 例：完全ピボッティング（2/5）

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3行−1行×3}]{\text{2行−1行×2}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1/2 & \boxed{7/2} & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$$

2行⇔3行
2列⇔3列

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{array}\right)$$

絶対値最大の項を見つけ、
つぎのピボットとする.

# 例：完全ピボッティング（3/5）

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{pmatrix} \xrightarrow{2行\times(2/7)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{pmatrix}$$

3行−2行×2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 2/7 & 2/7 \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{pmatrix} \xrightarrow[3行\times(7/2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 1 & \end{pmatrix}$$

# 例：完全ピボッティング（4/5）

ここまで、まとめると

$$
\left(\begin{array}{cccc}
2 & 4 & -2 & 8 \\
1 & 2 & 1 & 6 \\
1 & 3 & 2 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 3 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{前進消去}}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\
0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
$$

前進消去終了

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\
0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{後退代入}}
$$

$$x'_3 = 1$$

$$x'_2 = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} x'_3 = 1$$

$$x'_1 = 2 + \frac{1}{2} \times x'_2 - \frac{1}{2} \times x'_3 = 2$$

# 例：完全ピボッティング（5/5）

列を入れ替えたことを考慮する.

$$x_1' \Leftrightarrow x_2$$

$$x_2' \Leftrightarrow x_3$$

$$x_3' \Leftrightarrow x_1$$

ゆえに、もとの方程式の解は、

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$