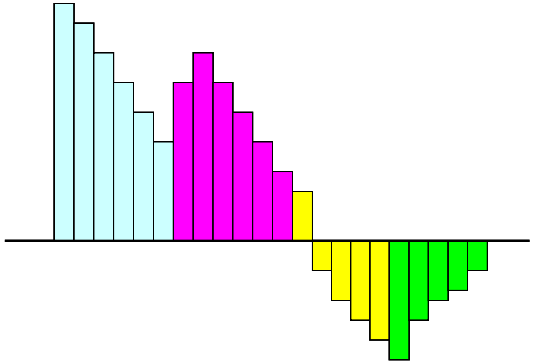
数値的に積分を実施する方法

- 台形公式
- シンプソンの公式
- ガウスの積分公式（ガウス＝ルジャンドル（Gauss-Legendre）とも呼ばれる，精度良い）

- 不定積分を解析的に求めるのではなく，有限な数のサンプル点における値を利用する

$$\int_{X_1}^{X_2} f(x)dx \Rightarrow \sum_{k=1}^{m}\left[w_k \cdot f(x_k)\right]$$



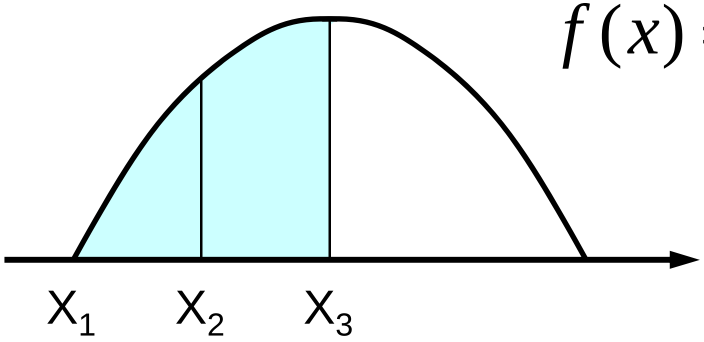
ガウス積分公式：一次元の例

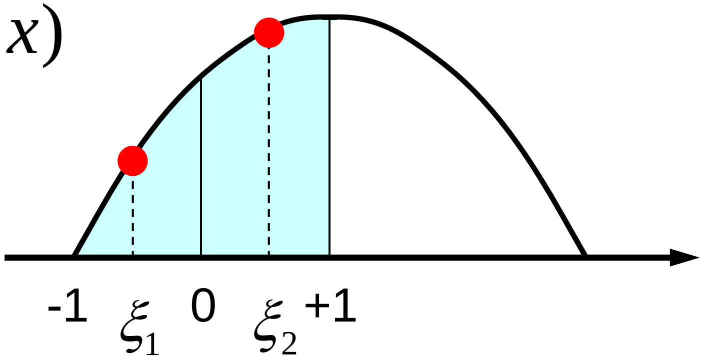
シンプソンの公式より精度良い

Simpson's

Gauss

$$f(x)=\sin(x)$$





$$X_1=0,\quad X_2=\frac{\pi}{4},\quad X_3=\frac{\pi}{2}$$

$$h=X_2-X_1=X_3-X_1=\frac{\pi}{4}$$

$$S=\frac{h}{3}\left[f(X_1)+4f(X_2)+f(X_3)\right]=1.0023$$

$$\xi_1,\xi_2=\pm 0.5773502692$$

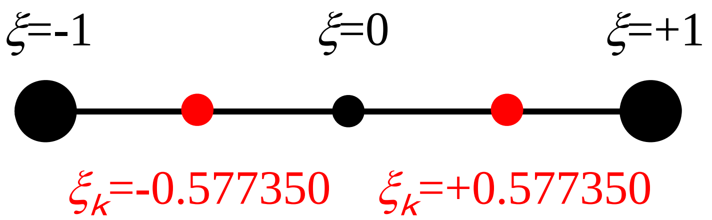
$$S=\int_0^{\pi/2} f(x)dx=\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,h\,d\xi$$

$$\cong h\sum_{k=1}^{2} W_k\cdot f(\xi_k)=0.99847$$

ガウスの積分公式

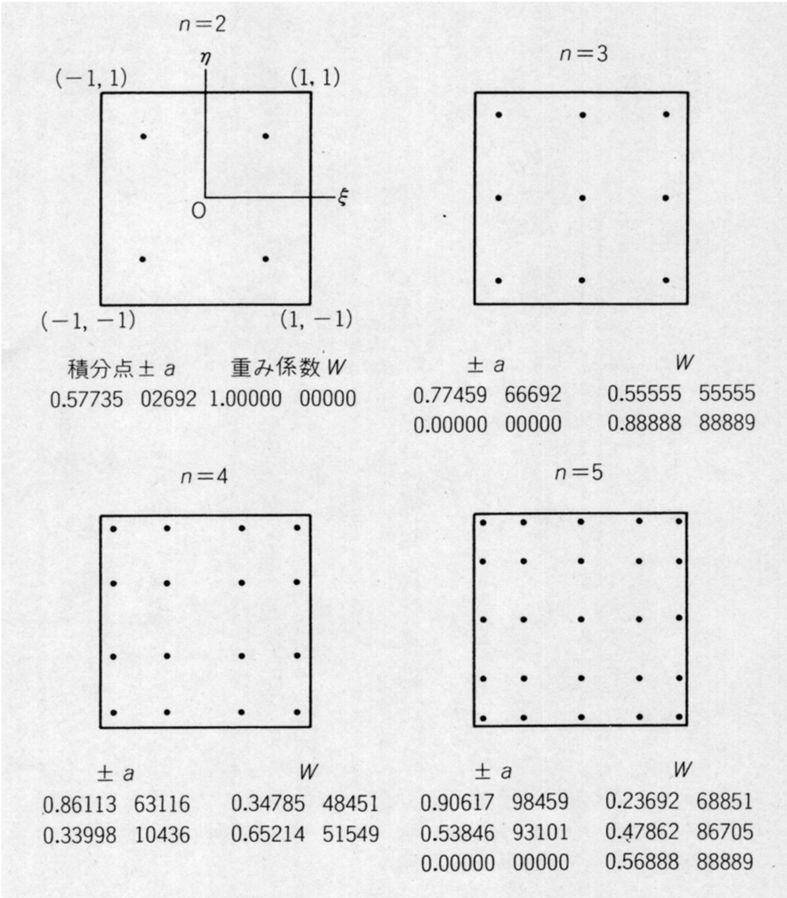
- 無次元化された自然座標系 [-1,+1] を対象とする。
- m個の積分点を使用すると（2m-1）次の関数までは近似可能（従って1次，2次の内挿関数（形状関数）を使用するときは，m=2で十分）

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{m}\left[w_k \cdot f(\xi_k)\right]$$



$$\begin{aligned}
m &= 1 \quad \xi_k = 0.00,\ w_k = 2.00 \\
m &= 2 \quad \xi_k = \pm 0.577350,\ w_k = 1.00 \\
m &= 3 \quad \xi_k = 0.00,\ w_k = 8/9 \\
& \qquad\ \ \xi_k = \pm 0.774597,\ w_k = 5/9
\end{aligned}$$

ガウスの積分公式
二次元，三次元にも容易に拡張可能



$n=2$

積分点 $\pm a$	重み係数 W
0.57735 02692	1.00000 00000

$n=3$

$\pm a$	W
0.77459 66692	0.55555 55555
0.00000 00000	0.88888 88889

$n=4$

$\pm a$	W
0.86113 63116	0.34785 48451
0.33998 10436	0.65214 51549

$n=5$

$\pm a$	W
0.90617 98459	0.23692 68851
0.53846 93101	0.47862 86705
0.00000 00000	0.56888 88889

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[W_i \cdot W_j \cdot f(\xi_i,\eta_j)\right]$$

m,n: ξ,η方向の積分点数

(ξ_i,η_j): 積分点の座標値

W_i,W_j: 積分点での重み係数

アイソパラメトリック要素

- 各要素を，自然座標系（local coordinate）[-1,+1]に変換する。
- 各要素の全体座標系（global coordinate）（x）における座標成分を，自然座標系における形状関数[N]を使用して変換する場合，このような要素をアイソパラメトリック要素（isoparametric element）という（従属変数の内挿と同じ[N]を使用）。

$$u = \sum_{i=1}^{n_N} N_i(\xi)\cdot u_i, \quad x = \sum_{i=1}^{n_N} N_i(\xi)\cdot x_i$$

$$n_N : 2,3...$$

$$u = \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2$$

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2$$

$$\left(= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\xi + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right)$$

Sub-Parametric
Super-Parametric