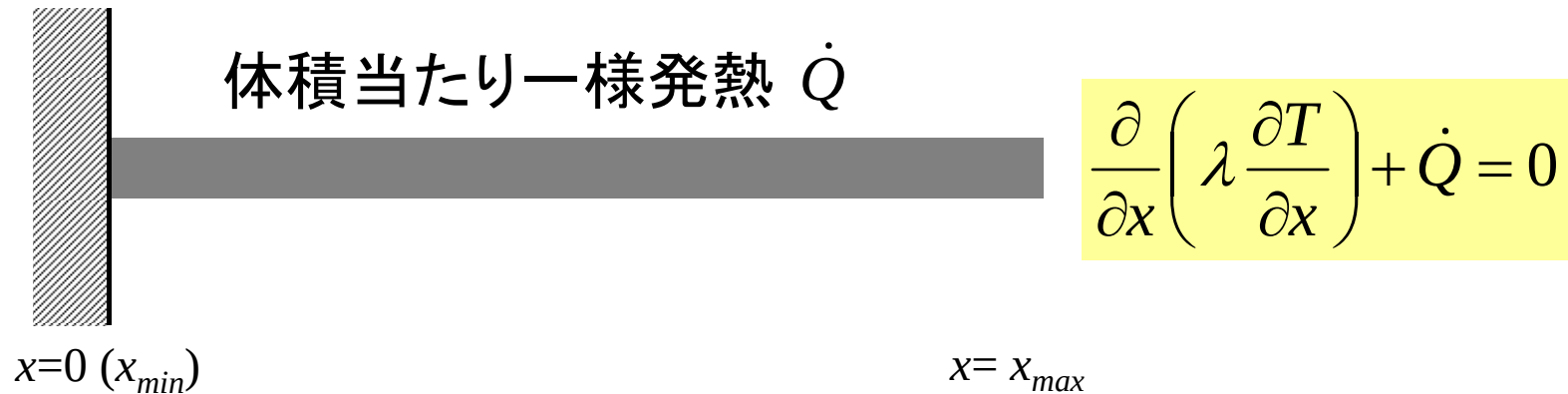
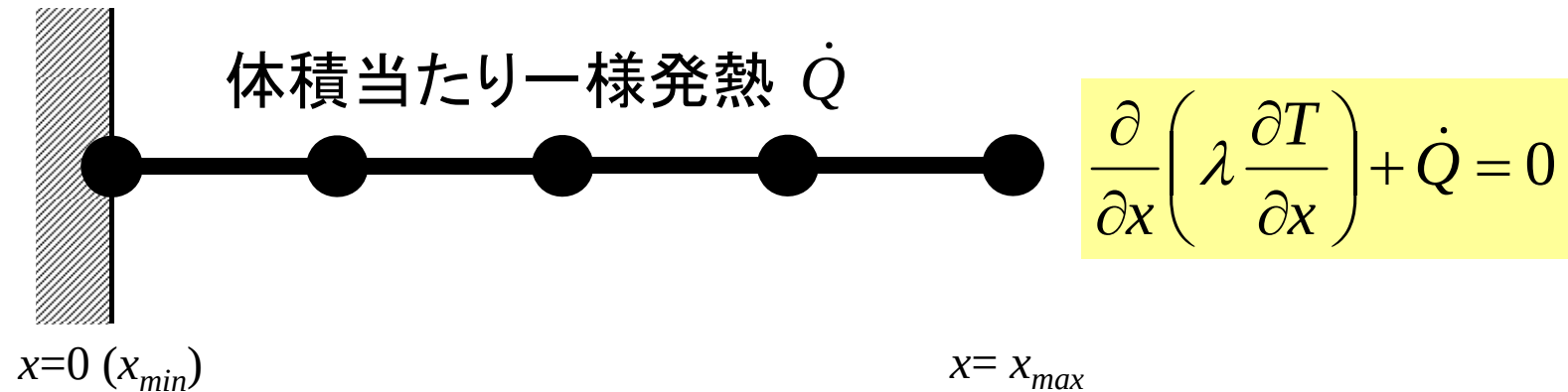


# 対象とする問題：一次元熱伝導問題



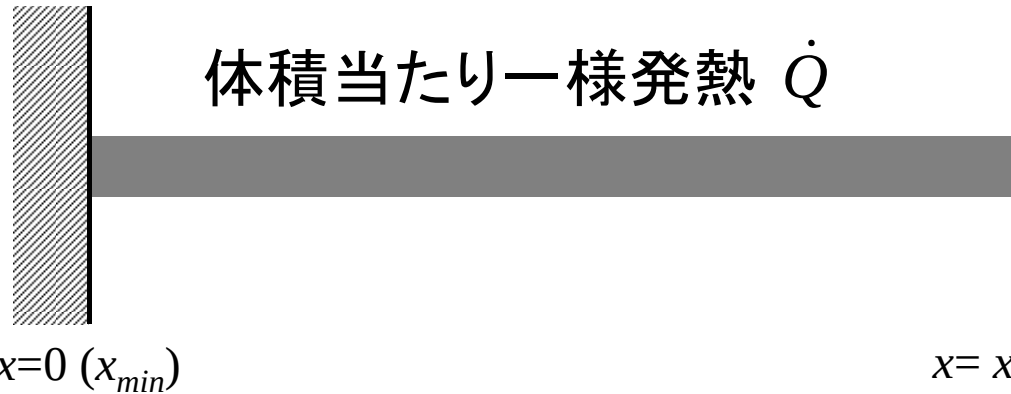
- 一様な：断面積 $A$ ，熱伝導率 $\lambda$
- 体積当たり一様発熱（時間当たり） $[QL^{-3}T^{-1}]$   $\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$  :  $T=0$  （固定）
  - $x=x_{max}$  :  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  （断熱）

# 対象とする問題：一次元熱伝導問題



- 一様な：断面積 $A$ ，熱伝導率 $\lambda$
- 体積当たり一様発熱（時間当たり） $[QL^{-3}T^{-1}]$   $\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$  :  $T=0$  （固定）
  - $x=x_{max}$  :  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  （断熱）

# 解析解



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{Q} = 0$$

$$T = 0 @ x = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 @ x = x_{max}$$

$$\lambda T'' = -\dot{Q}$$

$$\lambda T' = -\dot{Q}x + C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{Q}x_{max}, \quad T' = 0 @ x = x_{max}$$

$$\lambda T = -\frac{1}{2}\dot{Q}x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow C_2 = 0, \quad T = 0 @ x = 0$$

$$\therefore T = -\frac{1}{2\lambda}\dot{Q}x^2 + \frac{\dot{Q}x_{max}}{\lambda}x$$

# 一次元線形要素：形状関数（2/4）

- 節点での条件から，係数は以下のように求められる：

$$T = T_i @ x = X_i, \quad T = T_j @ x = X_j$$

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i, \quad T_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j$$

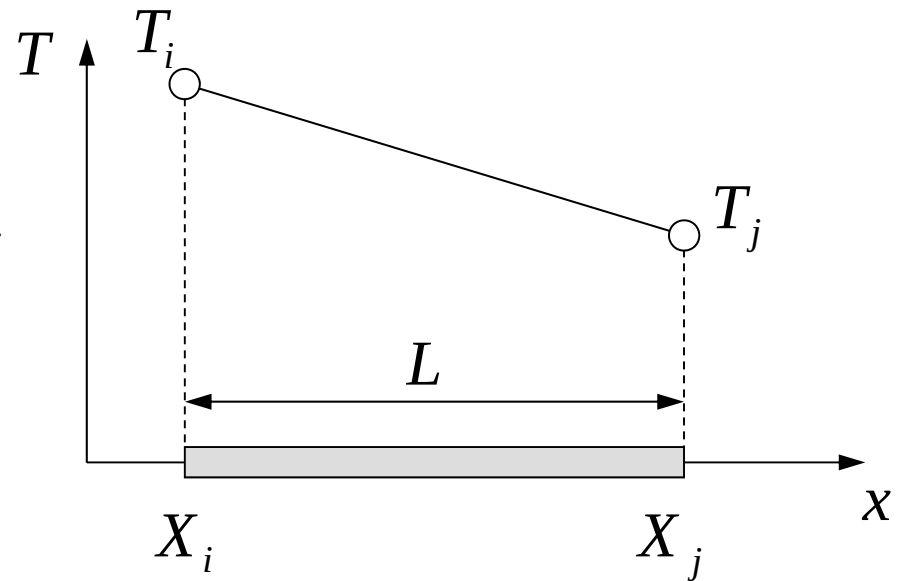
- 従って：

$$\alpha_1 = \frac{T_i X_j - T_j X_i}{L}, \quad \alpha_2 = \frac{T_j - T_i}{L}$$

- 元の式に代入して，書き直すと以下ようになる

$$T = \underbrace{\left( \frac{X_j - x}{L} \right)}_{N_i} T_i + \underbrace{\left( \frac{x - X_i}{L} \right)}_{N_j} T_j$$

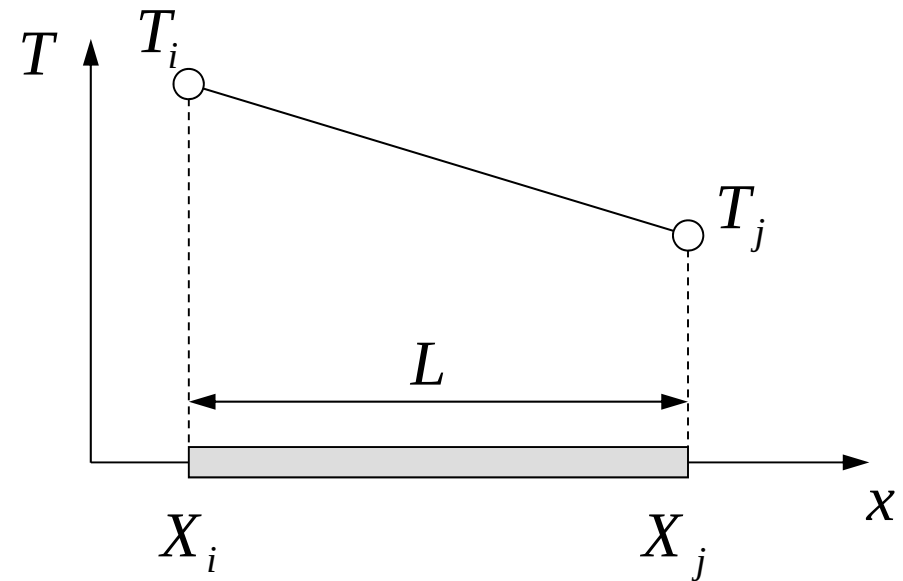
これらのxに関する一次式を形状関数 (shape function) または内挿関数 (interpolation function) と呼ぶ ( $N_i$ ,  $N_j$ と表す)



# 一次元線形要素：形状関数（3/4）

- 形状関数 $N_k$ は要素を構成する節点数と同じ数だけ存在する：
  - 位置座標のみの関数である
  - 「試行関数」の一種

$$N_i = \left( \frac{X_j - x}{L} \right), \quad N_j = \left( \frac{x - X_i}{L} \right)$$



- 形状関数の一次結合により要素内の変位を表す
  - 係数（＝未知数）が節点における変位

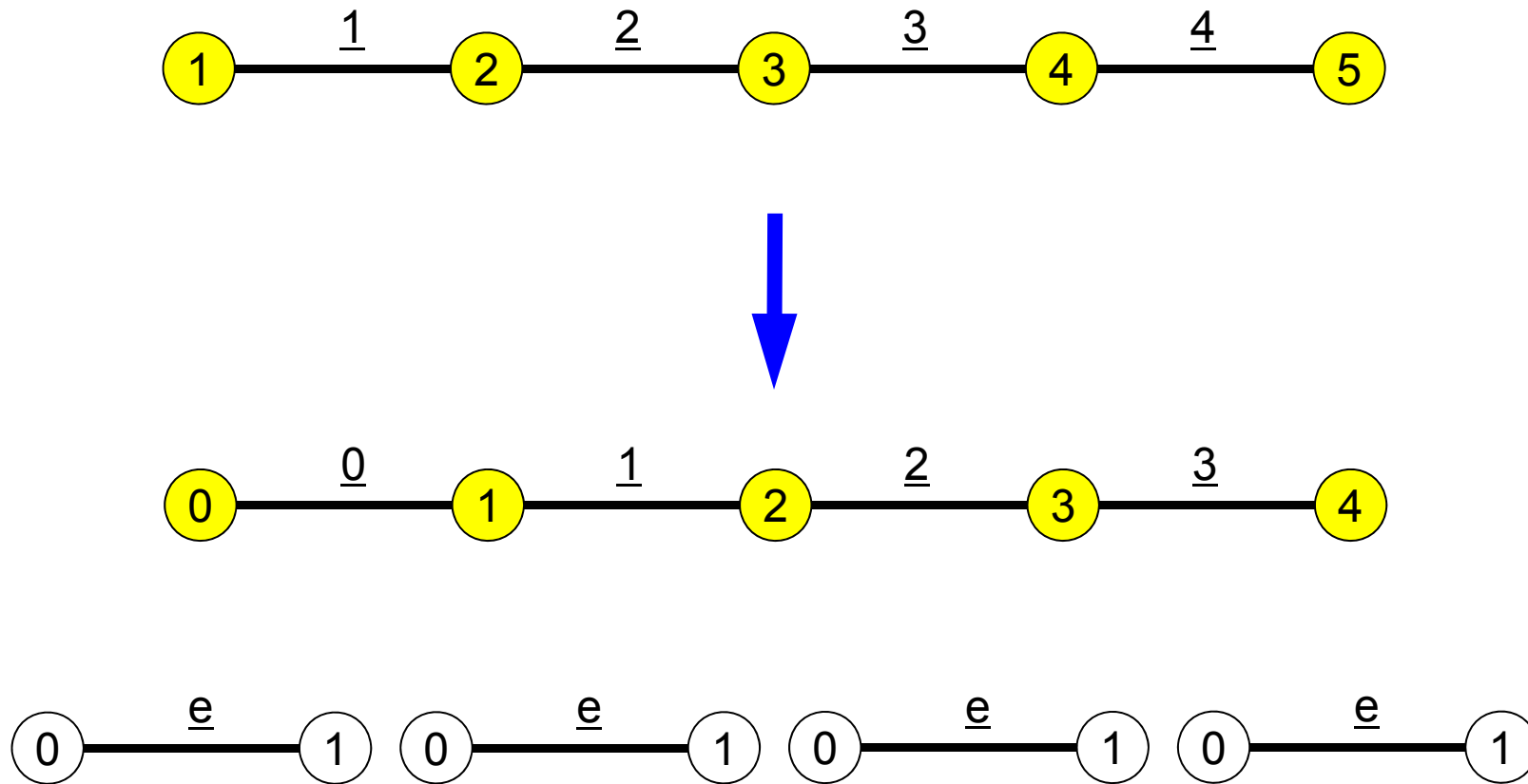
$$T = N_i T_i + N_j T_j \longleftrightarrow$$

$$T_M = \sum_{i=1}^M a_i \Psi_i$$

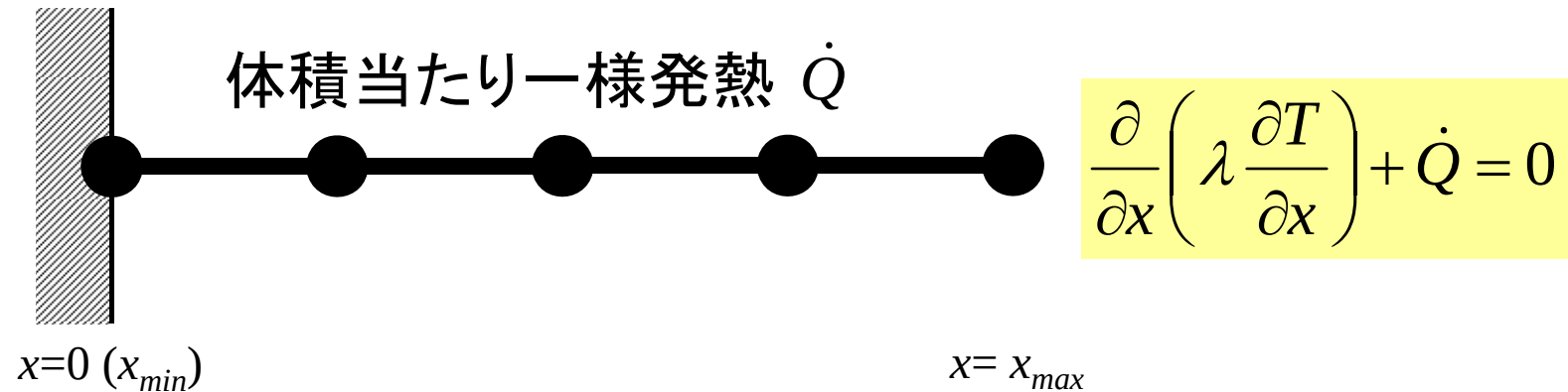
$\Psi_i$  領域, 境界において定義される, 位置座標のみ既知関数, 互いに独立である: 試行関数 (trial/test function) と呼ばれる。線形代数における基底 (basis) に相当する

$a_i$  係数 (未知数)

注意：プログラムの中では節点・要素番号  
は0からふられている（C言語）



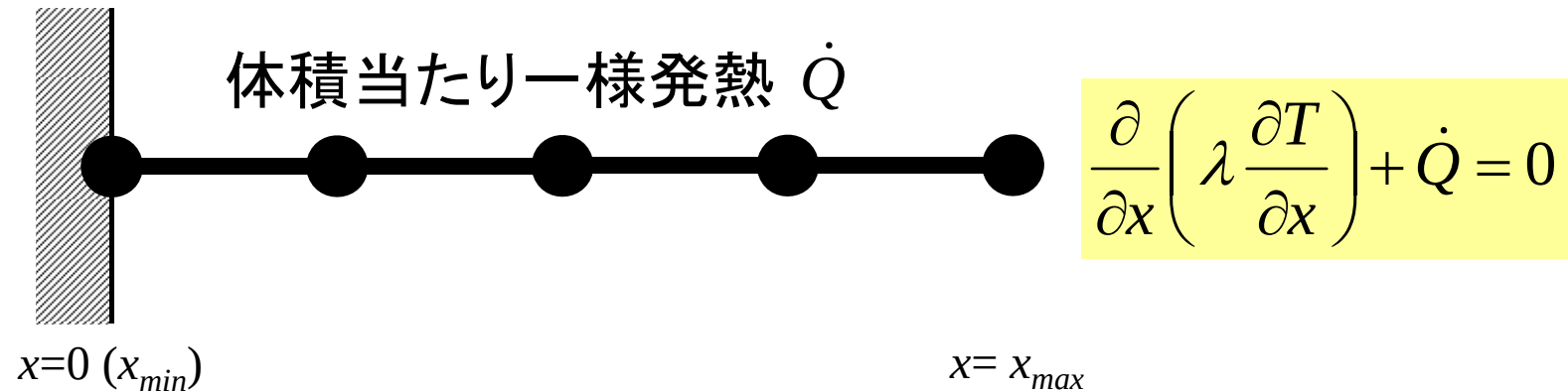
# 対象とする問題：一次元熱伝導問題



- 一様な：断面積 $A$ ，熱伝導率 $\lambda$
- 体積当たり一様発熱（時間当たり） $[QL^{-3}T^{-1}]$   $\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$  :  $T=0$  （固定）
  - $x=x_{max}$  :  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  （断熱）

# $x=0$ で成立する方程式

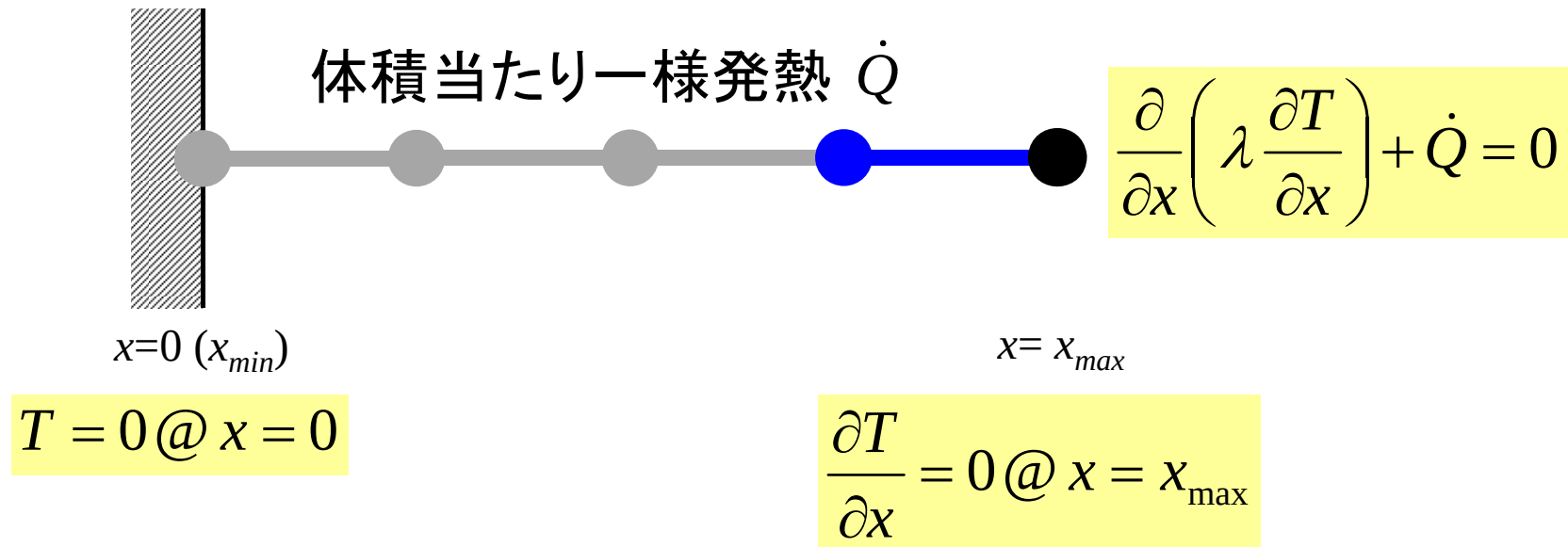
$$T_1=0$$



- 一様な：断面積 $A$ ，熱伝導率 $\lambda$
- 体積当たり一様発熱（時間当たり） $[QL^{-3}T^{-1}]$   $\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$  :  $T=0$  （固定）
  - $x=x_{max}$  :  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  （断熱）



## 第二種境界条件（断熱）



$$\int_S \bar{q} [N]^T dS = \bar{q} A|_{x=L} = \bar{q} A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{q} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{表面熱流束}$$



$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 @ x = x_{max}$$

断熱境界条件が成立するため,  $\bar{q} = 0$   
 従ってこの項の寄与は無い。  
 断熱境界条件は何もしなくても成立  
 → 自然境界条件