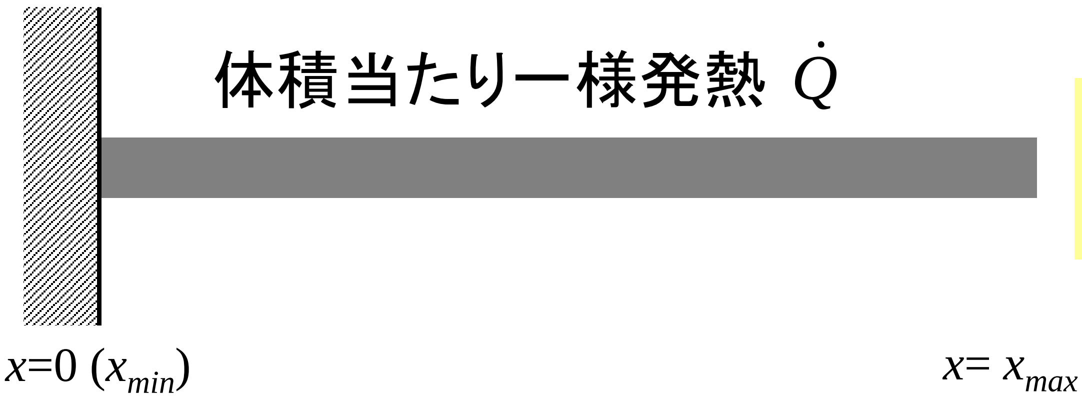
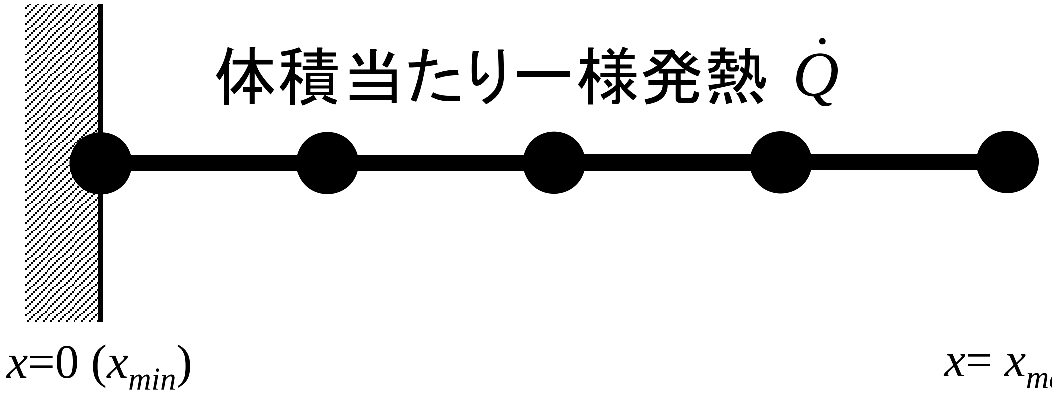
対象とする問題：一次元熱伝導問題



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{Q} = 0$$

- 一様な：断面積A，熱伝導率λ
- 体積当たり一様発熱（時間当たり）〔QL^{-3}T^{-1}〕$\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$ ： $T=0$ （固定）
  - $x=x_{max}$ ： $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ （断熱）

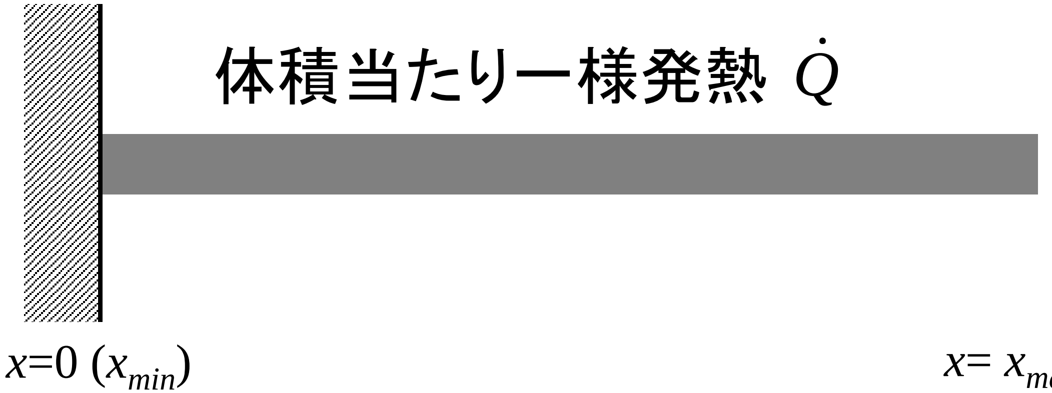
対象とする問題：一次元熱伝導問題



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{Q}=0$$

- 一様な：断面積A，熱伝導率λ
- 体積当たり一様発熱（時間当たり）〔QL^{-3}T^{-1}〕$\dot{Q}$
- 境界条件
  - x=0　：T= 0　（固定）
  - x=x_{max}：$\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$（断熱）

解析解



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{Q}=0$$

$$T=0\,@\,x=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0\,@\,x=x_{\max}$$

$$\lambda T''=-\dot{Q}$$

$$\lambda T'=-\dot{Q}x+C_1 \Rightarrow C_1=\dot{Q}x_{\max},\quad T'=0\,@\,x=x_{\max}$$

$$\lambda T=-\frac{1}{2}\dot{Q}x^2+C_1x+C_2 \Rightarrow C_2=0,\quad T=0\,@\,x=0$$

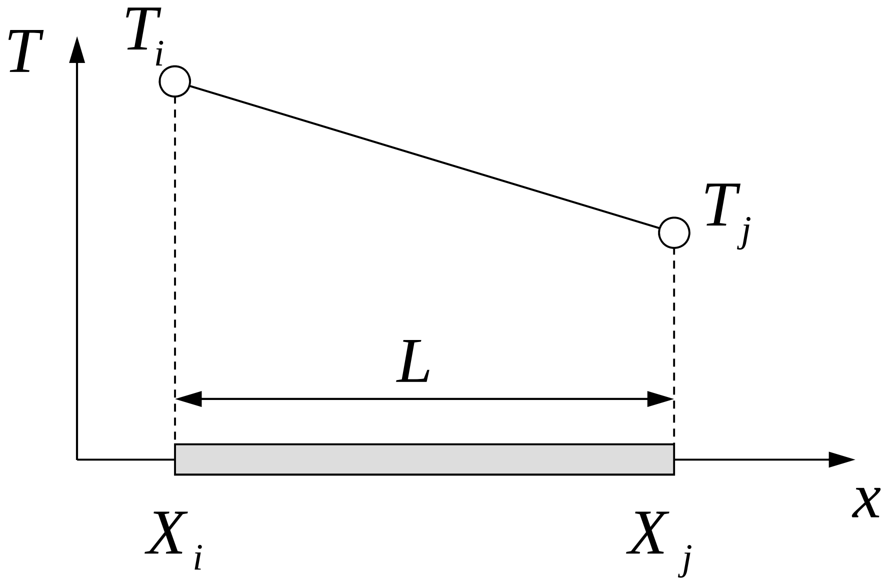
$$\therefore\quad T=-\frac{1}{2\lambda}\dot{Q}x^2+\frac{\dot{Q}x_{\max}}{\lambda}x$$

一次元線形要素：形状関数（2/4）

- 節点での条件から，係数は以下のように求められる：

$$T = T_i \,@\, x = X_i, \quad T = T_j \,@\, x = X_j$$

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i, \quad T_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j$$



- 従って：

$$\alpha_1 = \frac{T_i X_j - T_j X_i}{L}, \alpha_2 = \frac{T_j - T_i}{L}$$

- 元の式に代入して，書き直すと以下のようになる

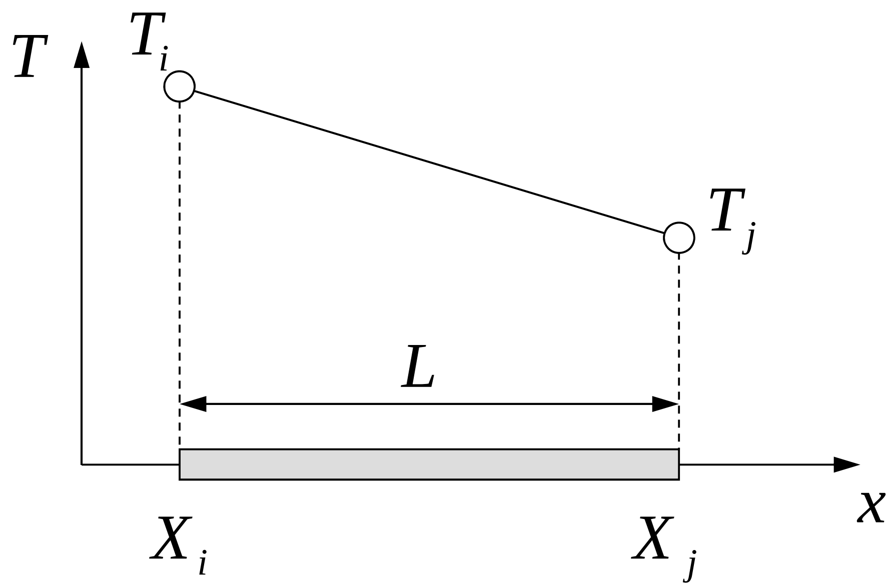
$$T = \underbrace{\boxed{\left(\frac{X_j - x}{L}\right)}}_{N_i} T_i + \underbrace{\boxed{\left(\frac{x - X_i}{L}\right)}}_{N_j} T_j$$

これらのxに関する一次式を形状関数（shape function）または内挿関数（interpolation function）と呼ぶ（N_i, N_jと表す）

一次元線形要素：形状関数（3/4）

- 形状関数N_kは要素を構成する節点数と同じ数だけ存在する：
  - 位置座標のみの関数である
  - 「試行関数」の一種

$$N_i = \left(\frac{X_j - x}{L}\right), \quad N_j = \left(\frac{x - X_i}{L}\right)$$



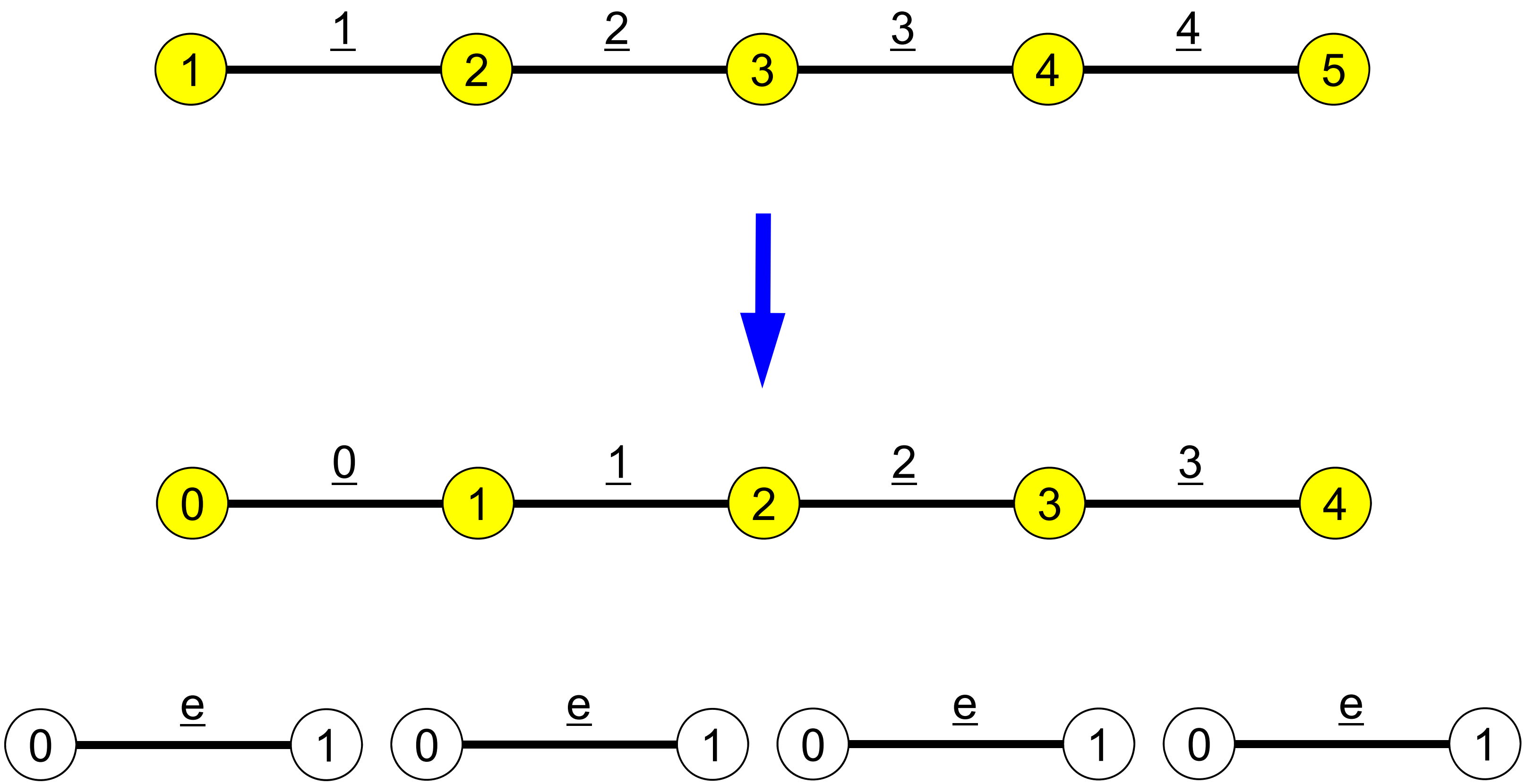
- 形状関数の一次結合により要素内の変位を表す
  - 係数（＝未知数）が節点における変位

$$T = N_i T_i + N_j T_j \longleftrightarrow T_M = \sum_{i=1}^{M} a_i \Psi_i$$

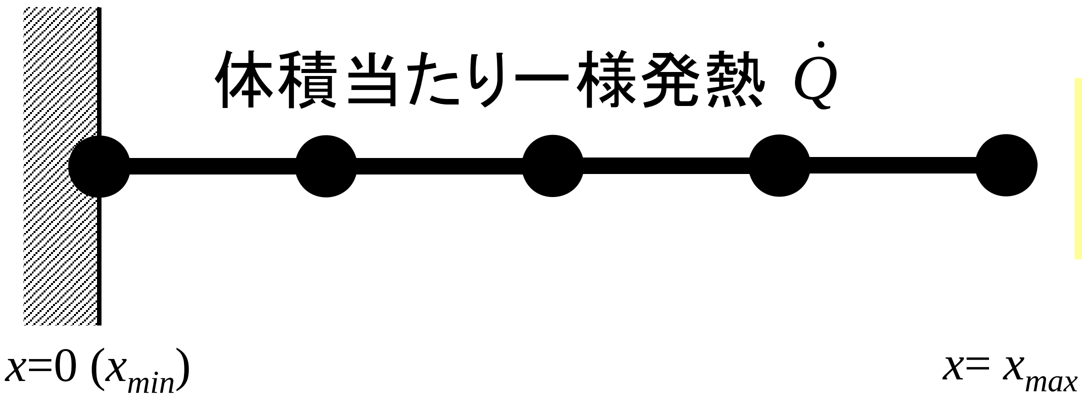
Ψ_i　領域，境界において定義される，位置座標のみ既知関数，互いに独立である：試行関数（trial/test function）と呼ばれる。線形代数における基底（basis）に相当する

a_i　係数（未知数）

注意：プログラムの中では節点・要素番号は0からふられている（C言語）



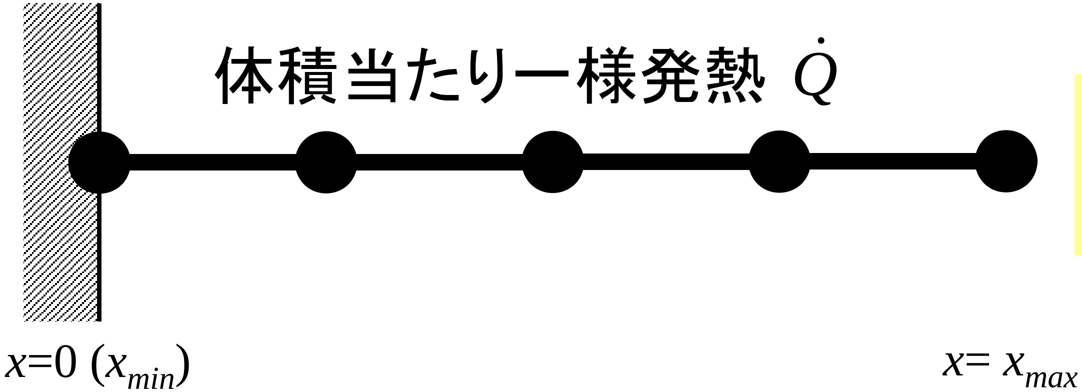
対象とする問題：一次元熱伝導問題



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{Q}=0$$

- 一様な：断面積A，熱伝導率λ
- 体積当たり一様発熱（時間当たり）〔$QL^{-3}T^{-1}$〕$\dot{Q}$
- 境界条件
  - $x=0$ ： $T=0$ （固定）
  - $x=x_{max}$ ： $\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$ （断熱）

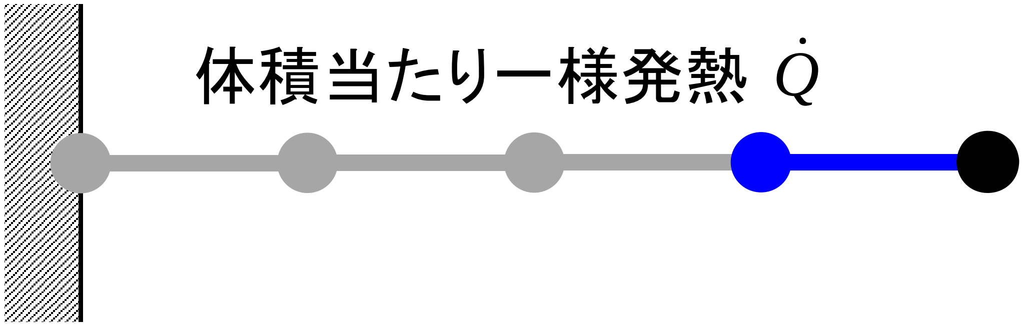
x=0で成立する方程式
T_0=0



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{Q}=0$$

- 一様な：断面積A，熱伝導率λ
- 体積当たり一様発熱（時間当たり）〔QL^{-3}T^{-1}〕$\dot{Q}$
- 境界条件
  - x=0　：T= 0　（固定）
  - x=x_{max} ：$\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$（断熱）

第二種境界条件（断熱）



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{Q}=0$$

x=0 (x_{min})

x= x_{max}

$$T=0 @ x=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 @ x=x_{\max}$$

$$\int_S \bar{q}[N]^T dS=\bar{q}A\Big|_{x=L}=\bar{q}A\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix},\quad \bar{q}=-\lambda\frac{dT}{dx}$$

表面熱流束

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 @ x=x_{\max}$$

断熱境界条件が成立するため，$\bar{q}=0$
従ってこの項の寄与は無い。
断熱境界条件は何もしなくても成立
→自然境界条件