有限要素法入門（Ⅱ）

2011年夏学期

中島 研吾

科学技術計算Ⅰ（4820-1027）・コンピュータ科学特別講義Ⅰ（4810-1204）

- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- ガウス・グリーンの定理
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

偏微分方程式の近似解法

- 領域V，境界Sにおける以下の微分方程式を解くことを考える（境界値問題）：

$$L(u) = f$$

- 微分方程式の解uが以下のような関数u_Mで近似的に表されるものとする（一次結合，線形結合）：

$$u_M = \sum_{i=1}^{M} a_i \Psi_i$$

Ψ_i 領域，境界において定義される，位置座標のみ既知関数，互いに独立である：試行関数（trial/test function）と呼ばれる。線形代数における基底（basis）に相当する

a_i 係数（未知数）

重み付き残差法
Method of Weighted Residual (MWR)

- 以下に示す残差（residual）Rが0であれば厳密解である：

$$R = L(u_M) - f$$

- 重み付き残差法では残差Rに重み関数w（weight/weighting function）を乗じて，領域全体で積分した量が0になるような条件を考える：

$$\int_V w\,R(u_M)\,dV = 0$$

- 重み付き残差法は，残差=0の条件を領域において「平均的に」満たす近似解法である。

変分法（Ritz法）（1/2）

- 多くの問題においては汎関数（functional）$I(u)$が存在し，厳密解uが$I(u)$を極値にすること（停留）が知られている。
  - 汎関数が極値を持つためにuが満たすべき微分方程式をオイラー（Euler）方程式という。
  - 逆に，Euler方程式を満たすためには，uが $I(u)$ を停留させていれば良い。

- 例えば，弾性力学の支配方程式（平衡方程式，仮想仕事の原理）と等価な汎関数は，「最小ポテンシャルエネルギの原理（ひずみエネルギ最小の法則）」である。

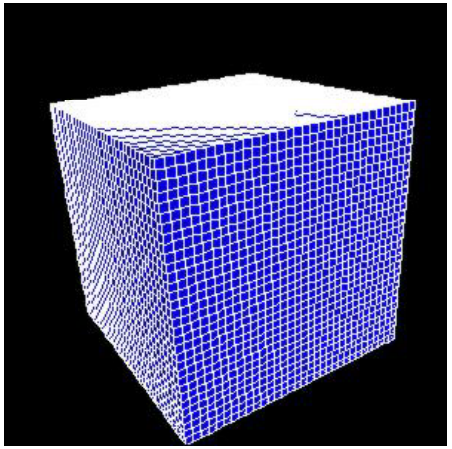
変分法（Ritz法）（2/2）

- 以下の近似解の式を$I(u)$に代入し，$I_M = I(u_M)$が極値になるようにすれば，係数a_iが求められu_Mが決定される。

$$u_M = \sum_{i=1}^{M} a_i \Psi_i$$

- 変分法は偏微分方程式の近似解法としては，理論的，数学的，物理的な背景が堅牢で理解しやすいのであるが，等価な変分問題を持つような微分方程式で無いと適用できない：
  - 本授業では重み付き残差法を使用する
  - あとで説明するが

有限要素法



- 全体を細かい要素に分割し，各要素に対して以下の近似を適用する：

$$u_M = \sum_{i=1}^{M} a_i \Psi_i$$

- 各要素に対して，重み付き残差法，または変分法（後述）を適用する。
- 全体の効果を足し合わせて，結果的に得られる連立一次方程式を解くことによって，偏微分方程式の近似解を求める（3分で分かる有限要素法）

- 詳しいことは次回以降

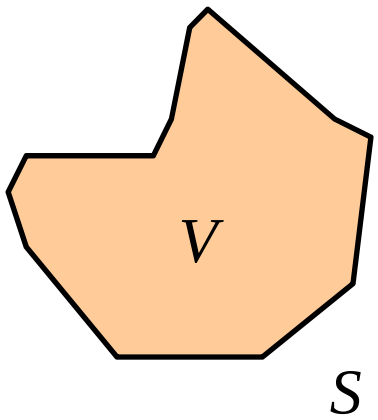
重み付き残差法の例（1/3）

- 熱伝導方程式

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q=0 \quad \text{in 領域}V$$

λ: 熱伝導率, Q: 体積あたり発熱量

$T=0$ at 境界S



- 近似解

$$T=\sum_{j=1}^{n} a_j \Psi_j$$

- 残差

$$R(a_j, x, y)=\lambda\sum_{j=1}^{n} a_j\left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2}\right)+Q$$

重み付き残差法の例（2/3）

- 重み関数 w_i を乗じて積分

$$\int_V w_i \, R \, dV = 0$$

- 重み関数 w_i がn個の異なる関数であるとすれば,
上式はn個の連立一次方程式となる

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_V w_i \, \lambda \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} \right) dV = -\int_V w_i \, Q \, dV \quad (i = 1, \ldots, n)$$

重み付き残差法の例（3/3）

- 行列の形式で書くと以下のようになる

$$[B]\{a\}=\{Q\}$$

$$B_{ij}=\int_V w_i\,\lambda\left(\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial y^2}\right)dV,\quad Q_i=-\int_V w_i\,Q\,dV$$

実際はこれとは少しちがう（来週以降お話します）

様々な重み付き残差法

- 重み関数の定義の仕方が異なる

- 選点法（Collocation Method）
- 最小二乗法（Least Square Method）
- ガラーキン法（Galerkin Method）

選点法（Collocation Method）

- ディラックのデルタ関数を重み関数として選ぶ
  - 引数=0のとき無限大，それ以外では0の値をとる
  - 積分すると=1

$$w_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) \qquad \mathbf{x}: \text{座標ベクトル}$$

- デルタ関数の性質を利用して，n個の選点（collocation point）で残差 R が0になるように定め，nを増加させることによって領域全体で残差=0となる

$$\int_V R\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_i})\,dV = R\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_i}}$$

最小二乗法（Least Square Method）

- 重み関数として，以下を与える：

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}$$

- 以下の積分を未知数 a_i について最小化する：

$$I(a_i) = \int_V \left[R(a_i, \mathbf{x})\right]^2 dV$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left[I(a_i)\right] = 2\int_V \left[R(a_i, \mathbf{x})\frac{\partial R(a_i, \mathbf{x})}{\partial a_i}\right] dV = 0$$

$$\int_V \left[R(a_i, \mathbf{x})\underline{\frac{\partial R(a_i, \mathbf{x})}{\partial a_i}}\right] dV = 0$$

ガラーキン法（Galerkin Method）

- 重み関数＝試行関数

$$w_i = \Psi_i$$

- Galerkin, Boris Grigorievich
  - 1871-1945
  - ロシア，旧ソビエト連邦の工学者，数学者にして技術者
  - 1906年～1907年に反帝政派として投獄中にガラーキン法のアイディアを考えついたらしい。

例題（1/2）

- 支配方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

- 境界条件

$u = 0 @ x = 0$

$u = 0 @ x = 1$

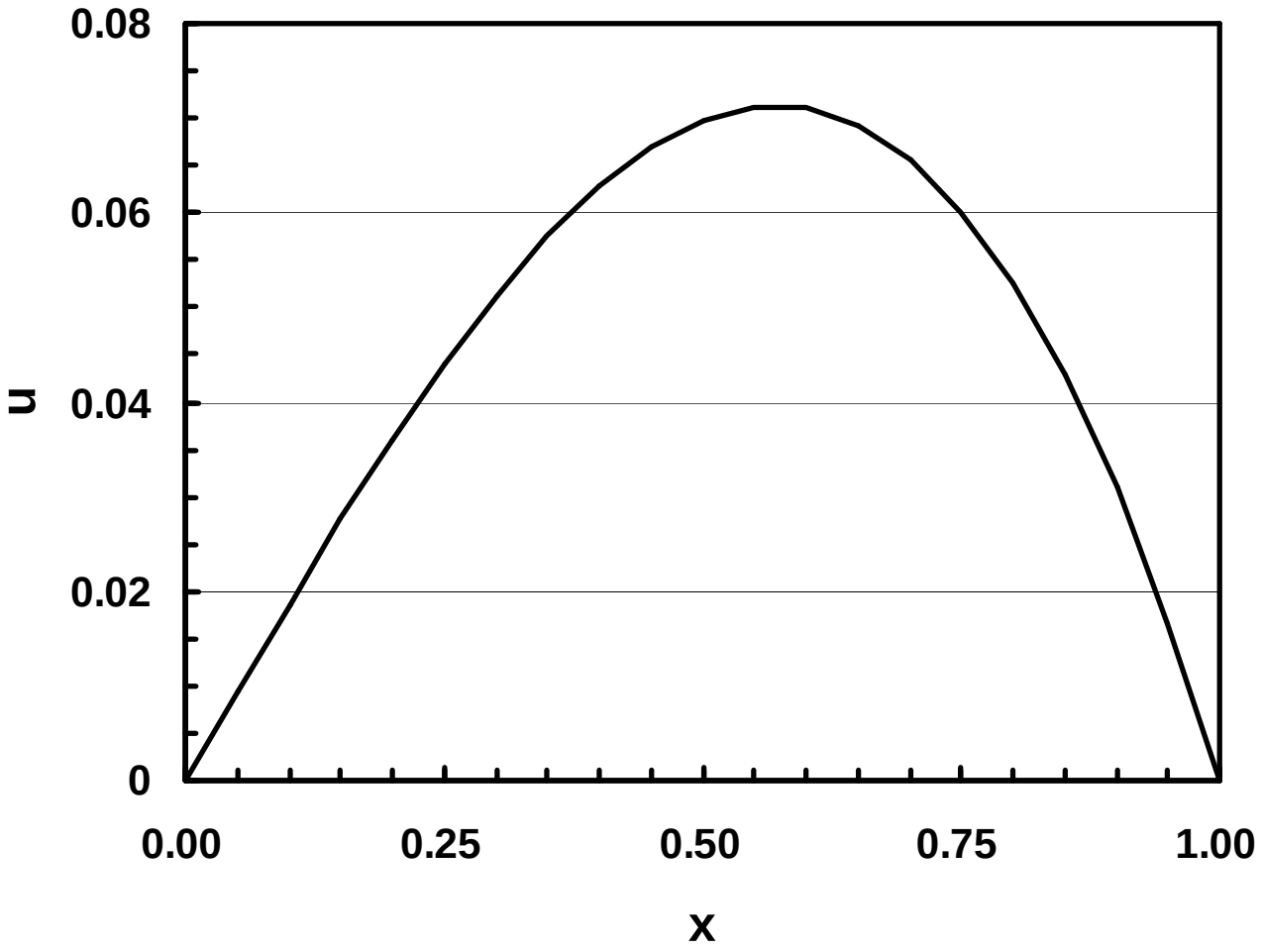
固定境界条件（第一種境界条件，Dirichlet型境界条件とも呼ぶ）

従属変数の微分係数が境界条件として与えられる場合を第二種またはNeumann型境界条件と呼ぶ）

- 厳密解（確かめてみよ）

$$u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

厳密解 $u = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x$



例題（2/2）

- 近似解を以下のように仮定する：

$$u = x(1-x)(a_1 + a_2 x) = x(1-x)a_1 + x^2(1-x)a_2 = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2$$

$$\Psi_1 = x(1-x), \quad \Psi_2 = x^2(1-x)$$

試行関数: *u=0@x=0,1*を満たす

- 残差は以下のように表される：

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- この問題に重みつき残差法の各手法を適用してみよう。
  - 未知数は a_1，a_2の2つなので，（独立な）重み関数も2つになる

選点法（Collocation Method）

- *n=2*であるので，*x=1/4*，*x=1/2* を選点とすると：

$$R(a_1, a_2, \frac{1}{4}) = 0, \quad R(a_1, a_2, \frac{1}{2}) = 0$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって：

$$\begin{bmatrix} 29/16 & -35/64 \\ 7/4 & 7/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_1 = \frac{6}{31}, \quad a_2 = \frac{40}{217}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{217}(42 + 40x)$$

最小二乗法（Least Square Method）

- 定義により：

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial a_1} = -2 + x - x^2, \quad w_2 = \frac{\partial R}{\partial a_2} = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって：

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\frac{\partial R}{\partial a_1}\,dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)(-2 + x - x^2)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\frac{\partial R}{\partial a_2}\,dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)(2 - 6x + x^2 - x^3)\,dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 202 & 101 \\ 707 & 1572 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 399 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_1 = \frac{46161}{246137}, \quad a_2 = \frac{41713}{246137}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{246137}(46161 + 41713x)$$

ガラーキン法（Galerkin Method）

- 定義により：

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x), \quad w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって：

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,\Psi_1\, dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,(x - x^2)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,\Psi_2\, dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,(x^2 - x^3)\, dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369}(71 + 63x)$$

計算結果の比較

X	厳密解	選点法	最小二乗法	ガラーキン法
0.25	0.04401	0.04493	0.04311	0.04408
0.50	0.06975	0.07143	0.06807	0.06944
0.75	0.06006	0.06221	0.05900	0.06009

- ガラーキン法が最も精度がよい。
  - 汎関数がある問題については，変分法とガラーキン法は答えが一致する（→菊地・岡部，矢川・宮崎）
    - 一種の解析解（あとで解説します）
- 多くの商用コードでガラーキン法を使用。
- 本授業でも今後ガラーキン法を扱う。
- 高レイノルズ数Navier-Stokes方程式など，最小二乗法を適用して安定化する場合もある。

宿題（1/2）

- 次ページに示す，モーメント法，部分領域法を使用して同様の計算を実施し，結果を厳密解，他の手法と比較せよ
  - x=0.25, 0.50, 0.75での値，有効数字4桁
- 選点法で選点以外での結果を厳密解と比較して見よ。
  - 挙動の理由を説明せよ
  - 他の選点でも試みてみよ

宿題（2/2）

- モーメント法（Method of Moment）
  - 重み関数 w_i を以下によって与え，残差の高次モーメントを0にする方法である：

$$w_i = \mathbf{x}^{i-1} \quad (i \geq 1)$$

  - ヒント：重み関数には何を選ぶ？

- 部分領域法（Sub-Domain Method）
  - 領域Vを部分領域V_i（i=1~n）に分割し以下のようにw_i を与える：

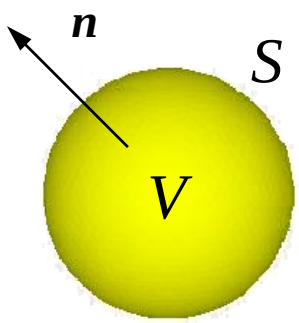
$$w_i = \begin{cases} 1 & V_i\text{の内部の点} \\ 0 & V_i\text{の外部の点} \end{cases}$$

  - ヒント：未知数は2つなので部分領域は2つ

- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- ガウス・グリーンの定理
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

ガウスの定理：Gauss's Theorem

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_S \left(U n_x + V n_y + W n_z \right) dS$$



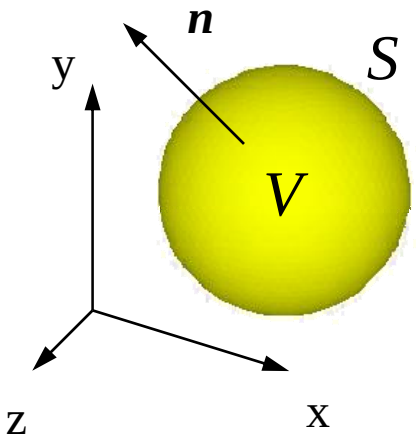
- 三次元デカルト座標（x,y,z）
- 滑らかな閉曲面Sによって囲まれたV
- V内で定義される，3つの連続関数
  - $U(x,y,z)$，$V(x,y,z)$，$W(x,y,z)$
- 曲面S上で外向きに引いた法線ベクトル$\boldsymbol{n}$
  - n_x，n_y，n_z：方向余弦

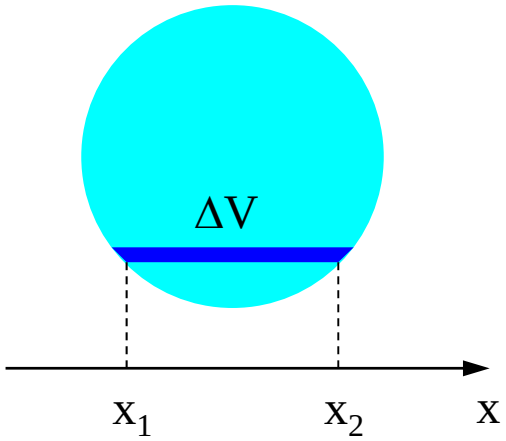
ガウスの定理：Gauss's Theorem 簡単な証明（1/3）

- x軸に平行な微小角柱を考えると：

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial x}\, dV = \iint dy\, dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx$$

$$= \iint U(x_2, y, z)\, dy\, dz - \iint U(x_1, y, z)\, dy\, dz$$

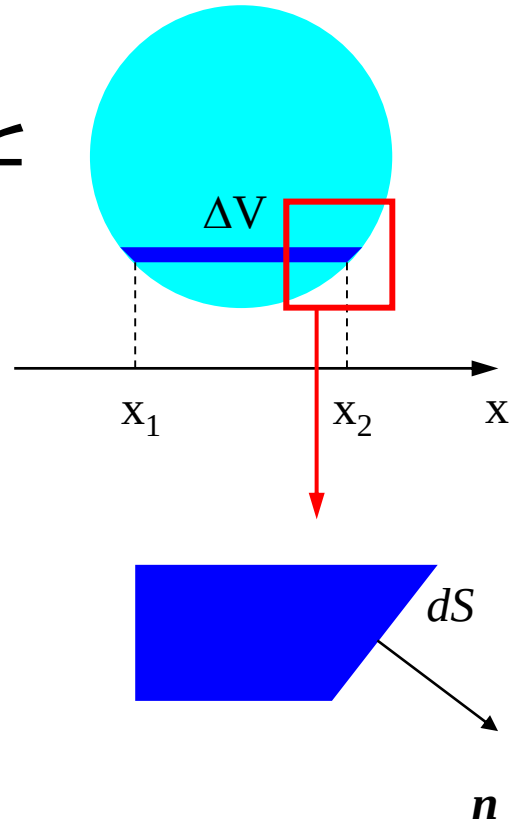




ガウスの定理：Gauss's Theorem 簡単な証明（2/3）

- 角柱が表面Sから切り取る面積をdSとすると：

$$dy\,dz = +n_x\,dS \quad (if\ \ n_x \geq 0)$$
$$dy\,dz = -n_x\,dS \quad (if\ \ n_x \leq 0)$$



- したがって：

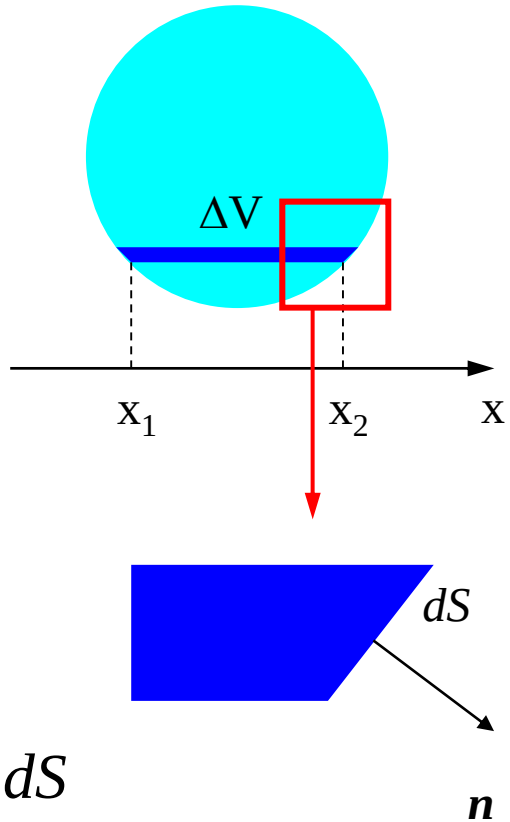
$$\int_{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial x}\,dV = \iint dy\,dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx$$
$$= \iint U(x_2, y, z)\,dy\,dz - \iint U(x_1, y, z)\,dy\,dz$$
$$= \int_{\Delta S_1} U\,n_x\,dS + \int_{\Delta S_2} U\,n_x\,dS$$

$$\mathbf{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right)$$

ガウスの定理：Gauss's Theorem 簡単な証明（3/3）

- これを全領域に拡張すると：

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial x}\, dV = \int_S U n_x \, dS$$



- 更にy,z方向に拡張して以下が成立：

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_S \left(U n_x + V n_y + W n_z \right) dS$$

$$\mathbf{n} = \left(n_x, n_y, n_z \right)$$

グリーンの定理（1/2）

- 以下のように仮定すると：

$$U = A\frac{\partial B}{\partial x}, \quad V = A\frac{\partial B}{\partial y}, \quad W = A\frac{\partial B}{\partial z}$$

- 以下が導かれる：

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = A\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

- これを積分してガウスの定理を適用すると以下が得られる：

$$\int_V A\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right) dV + \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z}\right) dV$$

$$= \int_S \left(Un_x + Vn_y + Wn_z\right) dS = \int_S A\left(\frac{\partial B}{\partial x}n_x + \frac{\partial B}{\partial y}n_y + \frac{\partial B}{\partial z}n_z\right) dS$$

グリーンの定理（2/2）

- （続き）

$$\int_S A\left(\frac{\partial B}{\partial x}n_x+\frac{\partial B}{\partial y}n_y+\frac{\partial B}{\partial z}n_z\right)dS=\int_S A\left(\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS$$

$$=\int_S A\frac{\partial B}{\partial n}dS \qquad \frac{\partial B}{\partial n}:B\text{の法線方向勾配}$$

- 結果として以下のようになる

$$\int_V A\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right)dV=\int_S A\frac{\partial B}{\partial n}dS-\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z}\right)dV$$

- 来週以降，よく登場します。
  - 二階微分の一階微分への置き換え

ベクトル表記すると

- ガウスの定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{w}\, dV = \int_S \mathbf{w}^T \mathbf{n}\, dS$$

- グリーンの定理

$$\int_V v \Delta u\, dV = \int_S \left(v \nabla u\right)^T \mathbf{n}\, dS - \int_V \left(\nabla^T v\right)\left(\nabla u\right) dV$$

- 偏微分方程式の数値解法（重み付き残差法）
- ガウス・グリーンの定理
- 偏微分方程式の数値解法（変分法）

（再出）変分法（Ritz法）（1/2）

- 多くの問題においては汎関数（functional）$I(u)$が存在し，厳密解uが$I(u)$を極値にすること（停留）が知られている。
  - 汎関数が極値を持つためにuが満たすべき微分方程式をオイラー（Euler）方程式という。
  - 逆に，Euler方程式を満たすためには，uが $I(u)$ を停留させていれば良い。

- 例えば，弾性力学の支配方程式（平衡方程式，仮想仕事の原理）と等価な汎関数は，「最小ポテンシャルエネルギの原理（ひずみエネルギ最小の法則）」である。

（再出）変分法（Ritz法）（2/2）

- 以下の近似解の式を$I(u)$に代入し，$I_M = I(u_M)$が極値になるようにすれば，係数a_iが求められu_Mが決定される。

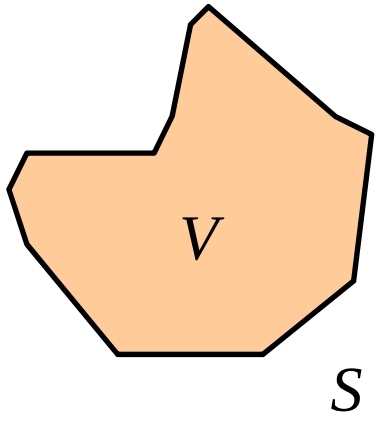
$$u_M = \sum_{i=1}^{M} a_i \Psi_i$$

- 変分法は偏微分方程式の近似解法としては，理論的，数学的，物理的な背景が堅牢で理解しやすいのであるが，等価な変分問題を持つような微分方程式で無いと適用できない：
  - 本授業では重み付き残差法を使用する

変分法の適用（1/5）

- 二次元領域Vにおいて，x, yの未知関数$u(x,y)$，その偏微分を含んだ積分$I(u)$を以下のように考える：

$$I(u)=\int_V \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2Qu\right\}dV$$



Q: 既知量

$u=0$ at 境界S

- 関数uの関数$I(u)$を汎関数（functional）と呼ぶ
- $I(u)$を最小にする2回連続微分可能な関数をu^*とし，境界Sでη=0を満たす任意関数をηとし，αをパラメータとして以下の式を考える：

$$u(x,y)=u^*(x,y)+\alpha\cdot\eta(x,y)$$

変分法の適用（2/5）

- このとき，以下の条件が必要である：

$$I(u) \geq I(u^*)$$

- 汎関数 $I(u^*+\alpha\eta)$ をαの関数とすれば，α=0のとき汎関数 I は最小になることから，以下が得られる：

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha} I\left(u^* + \alpha \cdot \eta\right)\right|_{\alpha=0} = 0$$

- 汎関数 $I(u)$ の定義より，以下のようになる：

$$\int_V \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - Q\eta \right) dV = 0$$

$$\because \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(u^* + \alpha \cdot \eta\right)}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \alpha = 0$$

変分法の適用（3/5）

- 左辺第1項，第2項にグリーンの定理を適用し，部分積分を実施すると，下記が得られる（$A=\eta$, $B=u^*$）：

$$-\int_V \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + Q \right) \eta \, dV + \int_S \eta \frac{\partial u^*}{\partial n} \, dS = 0$$

$$where \quad \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial u^*}{\partial y} n_y$$ u^*の法線方向勾配

- 境界面Sではη=0であるから：

$$-\int_V \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + Q \right) \eta \, dV = 0$$

- 任意のηについて成立するためには，(A)が成立：

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + Q = 0 \quad \text{(A)}$$

変分法の適用（4/5）

- 方程式(A)を「オイラー（Euler）方程式」と呼ぶ
  - 汎関数$I(u)$を最小にする関数u^*の<u>必要条件</u>はオイラー方程式を満たすことである。

- 十分条件は?
  - オイラー方程式の解をu^*, $\alpha\eta=\delta u^*$とする

$$I\left(u^*+\delta u^*\right)-I\left(u^*\right)=$$

$$-\int_V\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}+Q\right)\delta u^*\,dV+\int_V\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\left(\delta u^*\right)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\left(\delta u^*\right)}{\partial y}\right)^2\right\}dV$$

第1変分 $\delta I=0$
First Variation

第2変分 $\delta I^2\geqq 0$
Second Variation

変分法の適用（5/5）

- 下記が成立し，オイラー方程式の解u^*が汎関数$I(u)$を最小にする関数となっていることが確認された

$$I\left(u^* + \delta u^*\right) \geq I\left(u^*\right)$$

- 従ってオイラー方程式(A)と境界条件（u=0）によって与えられる境界値問題と変分問題は等価である
  - オイラー方程式（ここではポアソン方程式）を解く代わりに等価な変分問題を解いても良い，ということになる
  - 汎関数が存在する場合

変分法による近似解例（1/4）

- 汎関数

$$I(u)=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{2}u^2-xu\right\}dx$$

- 境界条件

$$u=0 @ x=0$$

$$u=0 @ x=1$$

- 汎関数$I(u)$を上記の境界条件のもとに停留させるuを求めよ
  - 対応するオイラー方程式は以下である（重み付き残差法と同じ）：

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0 \quad (0\le x\le 1) \qquad \text{(B-1)}$$

変分法による近似解例（2/4）

- 2回連続微分可能な関数uに対して，n次の試行関数を以下のように仮定する：

$$u_n = x \cdot (1-x) \cdot \left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}\right) \quad \text{(B-2)}$$

- 試行関数の次数nを増加させることにより，u_nは真の解uに近づくことから，汎関数$I(u)$も$I(u_n)$によって近似可能である
  - $I(u_n)$が停留すれば，$I(u)$も停留する
- 未知係数a_kに対して，以下の停留条件を満たすa_kを求めれば良い：

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1 \sim n) \qquad \text{(B-3)}$$

リッツ（Ritz）法

- 式(B-3)はa_1~a_nを未知数とする連立一次方程式となる
- この解を式(B-2)に代入することにより，$I(u_n)$を停留させる解（すなわちオイラー方程式(B-1)を満たす解の近似解）が得られる
  - 近似解ではあるが，オイラー方程式を直接満たす

- このように，関数uを有限個の試行関数の列に展開し，その際に導入される未知定数によって汎関数を停留する解を求める方法をリッツ（Ritz）法と呼ぶ

変分法による近似解例（3/4）

- リッツ法適用，n=2

$$u_2 = x\cdot(1-x)\cdot(a_1 + a_2 x) = x\cdot(1-x)\cdot a_1 + x^2\cdot(1-x)\cdot a_2$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \left[\int_0^1 (1-x-x^2)(1-3x+x^2)dx\right]a_1$$

$$+\left[\int_0^1 \left\{(1-2x)(2x-3x^2) - x^3(1-x)^2\right\}dx\right]a_2 + \int_0^1 x^2(1-x)dx = 0$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \left[\int_0^1 \left\{(1-2x)(2x-3x^2) - x^3(1-x)^2\right\}dx\right]a_1$$

$$+\left[\int_0^1 (2x-3x^2+x^3)(2x-2x^2-x^3)dx\right]a_2 + \int_0^1 x^3(1-x)dx = 0$$

変分法による近似解例（4/4）

- これを整理すると以下のようになる：

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369}(71+63x)$$

- この結果はガラーキン法と一致する
  - 決して偶然ではない

ガラーキン法（Galerkin Method）

- 定義により： 試行関数: $u=0@x=0,1$を満たす

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x), \quad w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$R(a_1, a_2, x) = x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2$$

- したがって：

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,\Psi_1\, dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,(x - x^2)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,\Psi_2\, dx = \int_0^1 R(a_1, a_2, x)\,(x^2 - x^3)\, dx = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41}$$

$$u = \frac{x(1-x)}{369}(71 + 63x)$$

リッツ法とガラーキン法（1/4）

$$u_2 = x\cdot(1-x)\cdot(a_1 + a_2 x) = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}u^2 - xu \right\} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du_2}{dx}\right)^2\right] = \frac{du_2}{dx}\cdot\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{du_2}{dx}\right) = \left(a_1\frac{dw_1}{dx} + a_2\frac{dw_2}{dx}\right)\frac{dw_1}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\frac{1}{2}u_2{}^2\right] = u_2\cdot\frac{\partial u_2}{\partial a_1} = (a_1 w_1 + a_2 w_2)\cdot w_1$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 - w_1{}^2\right\} dx\right] a_1 + \left[\int_0^1 \left(\frac{dw_1}{dx}\frac{dw_2}{dx} - w_1 w_2\right) dx\right] a_2 - \int_0^1 x w_1 dx = 0$$

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{dw_1}{dx}\frac{dw_2}{dx} - w_1 w_2\right) dx\right] a_1 + \left[\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2 - w_2{}^2\right\} dx\right] a_2 + -\int_0^1 x w_2 dx = 0$$

リッツ法とガラーキン法（2/4）

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 - w_1{}^2\right\} dx\right] a_1 + \left[\int_0^1 \left(\frac{dw_1}{dx}\frac{dw_2}{dx} - w_1 w_2\right) dx\right] a_2 - \int_0^1 x w_1 dx = 0$$

$$\left[\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 a_1 + \frac{dw_1}{dx}\frac{dw_2}{dx} a_2\right\} dx\right] - \left[\int_0^1 w_1 \left\{\left(w_1 a_1 + w_2 a_2\right) + x\right\} dx\right] = 0$$

$$w_1 = \Psi_1 = x(1-x), \quad w_2 = \Psi_2 = x^2(1-x)$$

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 a_1\right\} dx = \left(a_1 w_1 \frac{dw_1}{dx}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 w_1 \left\{\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1\right\} dx = -\int_0^1 w_1 \left\{\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1\right\} dx$$

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{dw_1}{dx}\frac{dw_2}{dx}\right) a_2\right\} dx = \left(a_2 w_1 \frac{dw_2}{dx}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 w_1 \left\{\frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2\right\} dx = -\int_0^1 w_1 \left\{\frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2\right\} dx$$

リッツ法とガラーキン法（3/4）

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow$$

$$-\int_0^1 w_1 \left\{ \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 + \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right) + (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \right\} dx = 0$$

$$\boxed{-\int_0^1 w_1 \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} + u_2 + x \right) dx = 0}$$

ガラーキン法そのもの

$$\frac{\partial I(u_2)}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\int_0^1 w_2 \left\{ \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} a_1 + \frac{d^2 w_2}{dx^2} a_2 \right) + (w_1 a_1 + w_2 a_2) + x \right\} dx = 0$$

$$\boxed{-\int_0^1 w_2 \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} + u_2 + x \right) dx = 0}$$

リッツ法とガラーキン法（4/4）

- 今回示したのは非常に特殊な例ではあるが，一般的に汎関数が存在する場合，ガラーキン法とリッツ法は一致する
- リッツ法は近似解ではあるが，オイラー方程式を直接満たしているので「厳密解」により近いと言える
  - ガラーキン法の「精度」が高い理由
    - この事実だけをとりあえず覚えておいてください
- 汎関数が存在しない場合は成立しない
  - 精度，安定性等の観点からガラーキン法が最良でない場合もある